

# Idées gromoviennes : le diamètre observable

Yann Ollivier

Octobre 2000

Le leitmotiv est le suivant : sur certains espaces de grande dimension, une fonction lipschitzienne est presque constante. « Presque » signifie que l'espace concerné est doté d'une mesure canonique et que sur une partie de mesure très grande, la fonction considérée est très proche d'une certaine valeur. Toutes ces idées sont décrites dans le chapitre 3 $\frac{1}{2}$  de [Gro1].

L'exemple le plus connu d'une telle situation est la loi des grands nombres : on prend un grand nombre  $n$  de variables aléatoires indépendamment distribuées à valeur dans un espace  $X$  (qui reçoit donc une mesure), et on considère des fonctions « naturelles » (la moyenne, le sup...) sur l'espace  $X^n$  des résultats de  $n$  tirages : ces fonctions sont, avec une probabilité proche de 1, très proches d'une certaine valeur (l'espérance de la variable, par exemple). Voir à ce propos l'excellent article de M. Talagrand, *A new look at independence* ([Tal]), qui donne un théorème de concentration des fonctions lipschitziennes sur tout espace de probabilité de la forme  $\Omega^n$ .

Un autre exemple (similaire) est celui de la physique statistique : sur l'espace des états d'un gaz, par exemple, toutes les fonctions physiquement intéressantes (pression, température, entropie...) sont bien définies, bien qu'il existe des configurations possibles, extrêmement improbables, qui donneraient des valeurs fort différentes mais jamais observées.

M. Gromov a placé ces idées dans un contexte géométrique. Étant donné un espace métrique mesuré, il définit la notion de « diamètre observable » : c'est l'amplitude maximale de variation d'une fonction 1-lipschitzienne définie sur cet espace, si l'on s'autorise à ne pas tenir compte d'une partie de l'espace de faible mesure où cette fonction aurait des valeurs exceptionnelles.

Plus précisément, si  $X$  est un espace métrique mesuré, de mesure  $\mu$  normalisée à 1, si l'on se fixe un paramètre  $\kappa$  représentant la proportion de

mesure qu'on s'autorise à négliger :

$$\text{ObsDiam}(X, \kappa) = \sup_f \left\{ \inf_Y \left\{ \text{diam } f(Y), Y \subset X, \mu(Y) \geq 1 - \kappa \right\}, \right. \\ \left. f : X \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ 1-lipschitzienne} \right\}$$

Si on avait la mauvaise foi de prendre  $\kappa = 0$ , on trouverait évidemment le diamètre ordinaire de l'espace  $X$  (plus exactement le diamètre essentiel de  $X$  où on retire une partie de mesure nulle). Ce qui nous intéresse est bien sûr de prendre  $\kappa$  petit mais non nul.

On remarque alors souvent que le diamètre observable est nettement plus petit que le diamètre habituel. Par exemple, pour la sphère de dimension  $n$  et de rayon 1, le diamètre observable est de l'ordre de  $1/\sqrt{n}$ . La dépendance en  $\kappa$  ressemble souvent à un facteur  $\sqrt{-\log \kappa}$  (cas où la masse des points à une distance supérieure à  $d$  décroît comme  $\exp(-d^2/2)$ ), ce qui croît lentement quand  $\kappa \rightarrow 0$ ; aussi omettra-t-on souvent de mentionner  $\kappa$ .

**Diamètre observable de la sphère.** Ces propriétés sont liées au phénomène de concentration de la mesure. Illustrons cela sur la sphère de grande dimension.

Considérons la sphère  $S^n$ ,  $n$  grand, de rayon 1, avec la mesure canonique normalisée à 1. Un calcul rapide montre que presque toute la masse de la sphère est située à une distance inférieure à  $1/\sqrt{n}$  du plan médian.

Plus exactement, la loi de la distance d'un point au plan médian est très proche d'une gaussienne d'écart-type  $1/\sqrt{n}$ . Cette constatation est ancienne (cf. [Lév]).

Pour transformer cela en évaluation du diamètre observable, il est nécessaire de faire intervenir le théorème isopérimétrique sur la sphère : parmi les parties de  $S^n$  de volume donné, celles dont le volume du bord (ou de manière équivalente, le volume d'un  $\varepsilon$ -voisinage) est le plus petit sont les calottes (jolie démonstration dans [FLM]).

En particulier, si on a une partie de mesure  $1/2$ , on est sûr qu'un  $\varepsilon$ -voisinage de cette partie contiendra au moins autant de volume qu'un  $\varepsilon$ -voisinage d'une demi-sphère; or on a vu que pour  $\varepsilon \approx 1/\sqrt{n}$ , un  $\varepsilon$ -voisinage de l'équateur (donc a fortiori d'une demi-sphère) contenait presque toute la mesure.

L'évaluation du diamètre observable va alors comme suit : prenons une fonction  $f$  sur  $S^n$  1-lipschitzienne. Soit  $\Sigma$  l'ensemble des points où  $f$  est inférieure à sa médiane. Par définition de la médiane,  $\Sigma$  est de volume  $1/2$  (quitte à retirer des points où  $f$  est précisément égale à sa médiane).

Fixons le paramètre  $\kappa$  pour le diamètre observable, et prenons  $\varepsilon = \lambda/\sqrt{n}$  tel qu'un  $\varepsilon$ -voisinage d'une partie de volume  $1/2$  de la sphère contienne presque tout le volume de la sphère, à  $\kappa/2$  près.

Alors, sauf sur un ensemble de mesure inférieure à  $\kappa/2$ , tout point de la sphère est distant de moins de  $\varepsilon$  d'un point de  $\Sigma$ . Sur  $\Sigma$ ,  $f$  est inférieure à sa médiane, et comme  $f$  est 1-lipschitzienne, cela implique que  $f$  est inférieure à sa médiane plus  $\varepsilon$ , sauf sur un ensemble de mesure inférieure à  $\kappa/2$ . En recommençant dans l'autre sens, si  $m$  est la médiane de  $f$ , on a prouvé qu'en-dehors d'un ensemble de mesure inférieure à  $\kappa$ ,  $f$  est comprise entre  $m - \varepsilon$  et  $m + \varepsilon$ .

En utilisant la formule gaussienne résultant du calcul que nous n'avons pas fait pour la concentration sur la sphère, on trouve ainsi que :

$$\text{ObsDiam}(S^n, \kappa) \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}} \sqrt{-\log(\kappa/4)}$$

De plus, en considérant la fonction « projection sur un axe de coordonnées », on voit que cette évaluation en  $\sqrt{-\log \kappa}/\sqrt{n}$  est correcte à un facteur constant près.

Tout ceci se transpose en fait au cas d'une variété riemannienne à courbure strictement positive (cf. [Gro2]). Soit  $V$  une variété de dimension  $n$  de courbure de Ricci partout supérieure à  $(n-1)/R^2$  (courbure de Ricci d'une sphère de rayon  $R$ ). Alors

$$\text{ObsDiam}(V, \kappa) \leq R \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}} \sqrt{-\log(\kappa/4)}$$

**Diamètre observable des sous-variétés de  $S^n$ .** Jusqu'ici, rien que de très élémentaire. On va désormais s'attacher à évaluer le diamètre observable de sous-variétés de  $S^n$ .

On a deux choix de métrique pour une sous-variété  $X$  de  $S^n$  : soit restreindre directement la fonction distance héritée de  $S^n$ , soit prendre la métrique intrinsèque de  $X$ , qui est celle de  $S^n$  où l'on ne s'autorise qu'à suivre des chemins à l'intérieur  $X$ .

Dans un premier temps, on ne s'intéressera qu'à la première, où la distance entre deux points de  $X$  est simplement leur distance dans  $S^n$ . Ce cas est beaucoup plus simple à traiter ; une évaluation du diamètre pour la métrique intrinsèque est connue uniquement dans le cas de sous-variétés *algébriques* de  $\mathbb{C}P^n$ , l'algébricité offrant plus de prise.

Soit donc  $X$  une sous-variété de  $S^n$ , de dimension  $n - k$ . On s'intéresse à la codimension  $k$ , autrement dit à des sous-variétés données par  $k$  équations,

point de vue plus adapté au cadre algébrique adopté ensuite. On supposera que cette codimension est assez petite. Sinon, si par exemple  $X$  est un cercle (de dimension 1, codimension  $n - 1$ ), son diamètre observable est de l'ordre de  $\pi$  (petite dimension, pas de concentration...).

On fait en outre les hypothèses suivantes :

- si  $S^k$  est une sphère équatoriale de  $S^n$  (sous-sphère de même rayon), de dimension  $k$  complémentaire de  $X$ , alors  $X \cap S^k$  contient au plus  $d$  points (si l'intersection est transverse) ;
- $\text{vol}_{n-k} X \geq c \text{vol} S^{n-k}$ .

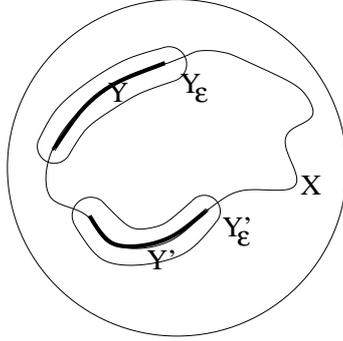
où  $\text{vol}_k$  désigne la mesure de volume usuelle en dimension  $k$ .

La première condition est l'analogie d'une condition de degré dans le cas algébrique.

La seconde condition tient au fait que si l'on prend des parties très petites de  $S^n$ , la géométrie globale de  $S^n$  qui force la petitesse du diamètre observable ne joue plus, et que le diamètre observable peut très bien être de l'ordre de  $\pi$  comme le diamètre ordinaire.

Le principe du raisonnement (que nous n'exposerons pas en entier) est que pour tout espace  $X$ , le diamètre observable  $\text{ObsDiam}(X, 2\kappa)$  est inférieur à la distance maximale entre deux parties de  $X$  de mesure (relative) supérieure à  $\kappa$  (cela résulte très simplement de la définition : si on a une fonction 1-lipschitzienne, on prend les ensembles de mesure  $\kappa$  où cette fonction est la plus grande et la plus petite ; si leur distance est inférieure à  $D$ , le diamètre observable est inférieur à  $D$ ).

On prend donc deux parties de  $X$  de mesure  $\kappa$  (par rapport à la mesure sur la sous-variété  $X$ ). On utilise ce qu'on sait déjà sur  $S^n$  pour évaluer la distance entre ces deux parties. Pour cela, on prend un  $\varepsilon$ -voisinage de ces parties dans  $S^n$ . On évalue le volume de ces deux voisinages : grâce au faible diamètre observable de  $S^n$ , on sait que même si ce volume n'est pas très grand, ces deux parties devront être proches l'une de l'autre. Il ne reste alors plus qu'à constater que la distance entre les deux parties de départ est inférieure à  $2\varepsilon$  plus la distance entre leurs  $\varepsilon$ -voisinages ; d'où l'on déduira que le diamètre observable de  $X$  est faible.



Les paramètres  $c$  et  $d$  des hypothèses interviennent dans l'évaluation du volume du  $\varepsilon$ -voisinage des parties considérées. Donnons seulement le résultat final :

$$\text{ObsDiam}(X, 2\kappa) \leq \frac{4\sqrt{k}}{\sqrt{n}} \sqrt{\log \left( \frac{n}{k} \left( \frac{d}{c\kappa} \right)^{2/k} \right)}$$

Observons la dépendance en  $\sqrt{\log n}/\sqrt{n}$  à  $d, c, k$  fixés (il se pourrait que le  $\sqrt{\log n}$  soit de trop).

J'ai cherché pendant un certain temps à améliorer ce résultat, aussi bien qu'à essayer de trouver des exemples où cette évaluation serait correcte, sans succès. On rencontre des problèmes comme la taille maximale d'un voisinage tubulaire d'une sous-variété, ou le nombre de calottes disjointes de rayon donné qu'on peut disposer sur une sphère.

**Diamètre observable des sous-variétés algébriques de  $\mathbb{C}P^n$ .** On va désormais considérer le cas de l'espace projectif complexe  $\mathbb{C}P^n$ , avec sa métrique et sa mesure canoniques.

D'abord, il est immédiat d'après la définition du diamètre observable, que si  $f : X \rightarrow Y$  est une application 1-lipschitzienne entre deux espaces métriques mesurés qui envoie la mesure de  $X$  sur la mesure de  $Y$ , alors le diamètre observable de  $Y$  est inférieur à celui de  $X$ . En utilisant l'application standard  $S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ , qui envoie bien la mesure canonique de  $S^{2n+1}$  sur celle de  $\mathbb{C}P^n$ , on obtient donc que le diamètre observable de  $\mathbb{C}P^n$  est inférieur à celui de  $S^{2n+1}$ .

Ensuite, pour ce qui est des sous-variétés algébriques avec la métrique directement restreinte de  $\mathbb{C}P^n$ , notre travail sur la sphère se transpose directement (avec des constantes légèrement différentes dans le résultat final, qui se trouve en outre simplifié par le fait que pour une variété algébrique, le volume  $c$  par rapport à celui du projectif est exactement égal au degré  $d$  — théorème de Wirtinger, voir par exemple [GH]), l'hypothèse sur le nombre

d'intersections avec une sous-sphère devenant ici exactement une borne sur le degré de notre sous-variété algébrique.

On s'intéresse donc désormais aux sous-variétés algébriques de  $\mathbb{C}P^n$  avec leur métrique propre, c'est-à-dire la métrique où la distance entre deux points est la longueur du plus petit arc *inclus dans la sous-variété* joignant ces points.

Il se trouve que l'algébricité permet, par une méthode assez complexe, d'estimer le diamètre observable pour cette métrique. La méthode comporte six (6) étapes que nous allons succinctement exposer.

Soit donc  $X \subset \mathbb{C}P^n$  une sous-variété algébrique complexe de codimension  $k$  et de degré  $d$ . Soit encore  $m = n - k$  la dimension (complexe) de  $X$ . L'idée est de comparer  $X$  avec un sous-espace projectif  $\mathbb{C}P^m$  : on va projeter  $X$  orthogonalement sur un  $\mathbb{C}P^m$  en position bien choisie, et on va essayer de contrôler le sort que fait subir cette projection à la métrique de  $X$  (a priori, cette projection peut beaucoup augmenter les distances, comme le fait la projection orthogonale de points proches d'un pôle sur l'équateur d'une sphère). Voici les étapes annoncées :

1. Choix du sous-espace sur lequel on va projeter. Ce sous-espace  $\mathbb{C}P^m$  est le quotient projectif d'un espace linéaire  $\mathbb{C}^{m+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ . Le « centre » de la projection orthogonale sur  $\mathbb{C}P^m$  est l'orthogonal de ce  $\mathbb{C}^{m+1}$  ; ils se déterminent mutuellement. On tient évidemment à ce que notre sous-variété  $X$  soit assez éloignée de ce centre, sinon la projection par ce centre fera exploser les distances. Il s'agit donc de trouver un sous-espace  $\mathbb{C}P^{k-1}$  de dimension complémentaire de  $X$ , aussi distant de  $X$  que possible. On montre par récurrence qu'il en existe un à distance  $1/(20^k d^{1+\log k})$ , ce qui n'est probablement pas optimal mais mieux que rien. Nous avons donc choisi notre  $\mathbb{C}P^m$ .
2. On note  $\text{dist}$  la distance usuelle sur  $\mathbb{C}P^n$ . On montre alors que la projection orthogonale de deux points de  $X$  sur notre  $\mathbb{C}P^m$  dilate la distance  $X$  d'un facteur au plus  $\pi 20^k d^{1+\log k}$ .
3. On considère maintenant sur  $X$  deux pseudo-distances auxiliaires : l'une,  $\text{dist}_p$  (comme « projetée »), définie comme la distance usuelle entre les projetés de deux points sur  $\mathbb{C}P^m$ , et l'autre,  $\text{dist}_{pc}$  ou « projetée, par chemins » comme la longueur pour  $\text{dist}_p$  du plus court arc *inclus dans  $X$*  joignant deux points. Par construction on a  $\text{dist}_p \leq \text{dist}_{pc}$ . Maintenant, on cherche à contrôler  $\text{dist}_{pc}$  par  $\text{dist}_p$ . Pour cela, on va se restreindre à une partie  $\Sigma \subset X$ , définie comme l'ensemble des antécédents des points de  $\mathbb{C}P^m$  n'ayant qu'un antécédent dans  $X$  par la

projection (génériquement, un point de  $\mathbb{C}P^m$  a  $d$  antécédents par cette projection). Alors, dès que  $x \in \Sigma, y \in X$ , on a  $\text{dist}_p(x, y) = \text{dist}_{pc}(x, y)$ .

4. On va enfin considérer la métrique intrinsèque  $\text{dist}_X$  sur  $X$ . On veut la contrôler par  $\text{dist}_{pc}$ . On montre que  $\text{dist}_X \leq C(k, d)(\text{dist}_{pc})^{1/d}$ . La puissance  $1/d$  provient du fait qu'aux points où  $X$  est parallèle à la direction de projection, la projection s'assimile à une puissance  $d$ -ième. Cette étape est particulièrement intriquée et fait intervenir divers résultats de géométrie complexe sur les positions de racines de polynômes.
5. En utilisant télescopiquement le contrôle de  $\text{dist}_X$  par  $\text{dist}_{pc}$ , de  $\text{dist}_{pc}$  par  $\text{dist}_p$  (sur une sous-partie  $\Sigma$  seulement), et de  $\text{dist}_p$  par la distance habituelle  $\text{dist}$ , on a réussi enfin (sur  $\Sigma$ ) à contrôler la métrique intrinsèque de  $X$  par la métrique de  $\mathbb{C}P^n$ . Maintenant, il faut prouver que  $\Sigma$  est assez gros pour ce que l'on veut en faire, au sens où beaucoup de points de  $X$  sont  $\varepsilon$ -proches de  $\Sigma$ ; ce qui se fait avec des techniques semblables à celles employées pour les sous-variétés de  $S^n$ .
6. Enfin, on utilise notre évaluation du diamètre observable de  $X$  pour la bête distance  $\text{dist}$ , la majoration de  $\text{dist}_X$  par  $\text{dist}$  sur  $\Sigma$  et le fait que beaucoup de points de  $X$  sont proches de  $\Sigma$  pour en déduire une majoration du diamètre observable de  $X$  pour la métrique  $\text{dist}_X$ .

On a ainsi démontré, pour  $n \geq 2kd$  (condition issue de la démonstration) :

$$\text{ObsDiam}(X, \kappa)_{\text{dist}_X} \leq C(k, d) \left( -\frac{k}{n} \log \left( \kappa^{1/k} \frac{k}{n} \right) \right)^{1/2d}$$

où pour mémoire  $C(k, d) \leq 10000000 \ 2000^k \ k \ 20^{k/d} \ d^{2 \log k + 4}$ .

On voit qu'à  $k$  et  $d$  fixés,

$$\text{ObsDiam}(X)_{\text{dist}_X} \lesssim \left( \frac{\log n}{n} \right)^{1/2d}$$

Rappelons que

$$\text{ObsDiam}(X)_{\text{dist}} \lesssim \sqrt{\frac{\log n}{n}}$$

On ne sait pas du tout dans quelle mesure ce résultat est précis.

## Références

- [FLM] T. Figiel, J. Lindenstrauss, V. Milman, *The dimension of almost spherical sections of convex bodies*, Acta Math. **139** (1977), p. 53–94.

- [GH] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley, New York (1978).
- [Gro1] M. Gromov, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Progress in Math. **152**, Birkhäuser, Boston (1999).
- [Gro2] M. Gromov, *Isoperimetric inequalities in Riemannian manifolds*, in *Asymptotic theory of finite dimensional normed spaces*, V. Milman et G. Schechtman, Lecture Notes in Mathematics **1200**, Springer-Verlag, Berlin (1986).
- [Lév] P. Lévy, *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Gauthier-Villars, Paris (1922), réédité en 1951 sous le titre *Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle*.
- [Tal] M. Talagrand, *A new look at independence*, Ann. Prob. **24** (1996), 1, p. 1–37.