Indice des sous-facteurs et polynômes de Jones

Yann Ollivier et Sandra Rozensztajn

1 Introduction

L'objet de cet exposé est l'étude des facteurs, qui sont certaines algèbres d'opérateurs sur des espaces de Hilbert. On définira l'indice d'un sous-facteur, qui sera un nombre réel mesurant sa taille relative. On cherchera surtout à savoir quelles valeurs peut prendre l'indice d'un sous-facteur quelconque. Pour certains facteurs (de type II_1), on verra que les valeurs possibles sont les nombres supérieurs à 4, et les valeurs de la forme $4\cos^2\frac{\pi}{n}$, $n = 3, 4 \ldots$. On expliquera aussi comment ces valeurs peuvent être réalisées.

Pour ce faire, étant donné un sous-facteur N du facteur M, on construira une tour croissante de facteurs emboîtés en utilisant l'espérance conditionnelle e_N sur N, qui en quelque sorte projette M sur N. e_N, conjointement avec M, définit un facteur contenant M. Cette construction peut être indéfiniment itérée, et la réunion forme une algèbre.

En étudiant l'algèbre ainsi obtenue, on déduit des restrictions sur les valeurs possibles de l'indice du sous-facteur qui était à l'origine de la construction.

De plus, cette algèbre présente quelques similitudes avec le groupe des tresses, et peut donc être utilisée en théorie des noeuds. C'est par cette voie que Jones a été amené à définir son fameux invariant de noeuds : le polynôme de Jones.

2 Algèbres de von Neumann

2.1 Définition des algèbres de von Neumann

Soit H un espace de Hilbert, et soit $E \subset L(H)$ un ensemble d'opérateurs continus sur H. Le *commutant* de E, noté E', est l'ensemble des opérateurs continus sur H qui commutent avec tous les éléments de E.

Pour tout E, E' est une sous-algèbre de $L(H)$, et on a l'inclusion $E \subset E''$.

Définition 1. *Une* algèbre de von Neumann *sur H est alors un sous-ensemble $E \subset L(H)$ tel que $E = E''$, stable pour l'opération d'adjonction $x \mapsto x^*$.*

On peut trouver une caractérisation simple des algèbres de von Neumann : une algèbre $M \subset L(H)$ stable pour l'adjonction est une algèbre de von Neumann si et seulement si elle est fermée (dans $L(H)$ pour la convergence simple des opérateurs).

Si on se place sur un espace de dimension finie, une algèbre de von Neumann est simplement une somme directe d'algèbres de la forme $M_n(\mathbb{C})$.

Par exemple sur $\mathbb{C}^6$, $\left\{ \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}, A, B \in M_2(\mathbb{C}) \right\}$ est une algèbre de von Neumann.

On définit ensuite les facteurs.

Définition 2. *Un* facteur *est une algèbre de von Neumann dont le centre est réduit aux homothéties.*

Si M est une algèbre de von Neumann, cette condition s'écrit $M \cap M' \sim \mathbb{C}$. Comme $M = M''$ on voit que si M est un facteur, M' l'est aussi. Par exemple, $L(H)$ tout entier est un facteur.

En dimension finie, un facteur est isomorphe à k copies *identiques* de $M_n(\mathbb{C})$. Ainsi $\left\{ \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}, A \in M_2(\mathbb{C}) \right\}$ est un facteur de l'algèbre de von Neumann donnée en exemple ci-dessus.

Ainsi en dimension finie, toute algèbre de von Neumann se décompose en somme directe de facteurs. En fait, ceci peut se généraliser en dimension infinie, en remplaçant la somme directe par une "intégrale directe" de sous-espaces.

2.2 La trace

Définition 3. *Une* trace finie *sur une algèbre de von Neumann M est une application linéaire de M dans $\mathbb{C}$ vérifiant $tr(ab) = tr(ba)$, et $tr(x) \geq 0$ si x est autoadjoint positif, et ayant de plus certaines propriétés de continuité.*

On peut normaliser la trace de façon à ce que $tr(1) = 1$.

La trace est dite *fidèle* si $tr(x) > 0$ dès que x est autoadjoint positif non nul.

Remarque 1. *(non triviale) Sur un facteur, s'il existe une trace fidèle finie, elle est unique à multiplication par un réel positif près, et réciproquement cette propriété caractérise les facteurs.*

Définition 4. *Un facteur muni d'une trace finie fidèle est dit* fini. *Un facteur qui n'est pas isomorphe à $L(H)$ pour un certain Hilbert H est dit continu. Un facteur fini continu est dit* de type II_1.

Dans un facteur de type II_1, pour tout $t \in [0,1]$, il existe un projecteur p de trace t.

Sur une algèbre de von Neumann M munie d'une trace fidèle et finie on peut définir un produit scalaire hermitien par $(a|b) = tr(a^*b)$. On note $\mathcal{L}^2(M, tr)$ l'espace de Hilbert obtenu en complétant M pour la norme provenant de ce produit scalaire. M agit naturellement sur $\mathcal{L}^2(M, tr)$ par multiplication à gauche, et M' par multiplication à droite (en fait, si J est l'extension à $\mathcal{L}^2(M, tr)$ de l'application $x \mapsto x^*$ de M dans M, ces deux actions se correspondent par $M' = JMJ$). On dit alors que M agit de façon standard. $\mathcal{L}^2(M, tr)$ possède un élément cyclique, i.e.dont l'orbite sous l'action de M est dense, et l'orbite sous l'action de M' aussi : l'élément 1.

Exemple 1. *Soit G un groupe discret. G agit sur l'espace de Hilbert $\ell^2(G)$ par multiplication à gauche. Soit M l'algèbre de von Neumann engendrée par les éléments de G. M est très difficile à décrire, toutefois on sait que $M \subset \ell^2(G)$. On peut définir une trace fidèle et finie sur M de la façon suivante : si $a \in M$, a peut s'écrire $\sum_{g \in G} f(g)g$, on pose alors $tr(a) = f(1)$, ce qui revient à prendre $tr(a) = (1|a)$ où $(.|.)$ est le produit scalaire naturel de $\ell^2(G)$. Supposons que les classes de conjugaison des éléments de G différents de 1 soient infinies. Alors M est un facteur. En effet si $\sum_{g \in G} f(g)g$ est dans le centre de M, il doit commuter avec tous les éléments de G, donc on a $f(hgh^{-1}) = f(g) \forall h \in G$. On en déduit que f est constante sur les classes de conjugaison, donc comme $\sum_{g \in G} f(g)g \in \ell^2(G)$, $f(g) = 0$ dès que $g \neq 1$, et donc a est scalaire.*

3 Indice d'un sous-facteur

On considère un sous-facteur N de type II_1 d'un facteur M, également de type II_1. On cherche à mesurer la taille relative de N dans M.

Dans la suite, si K est un sous-espace vectoriel de l'espace de Hilbert H, on notera E_K le projecteur orthogonal sur l'adhérence de K. On note tr_M la trace normalisée sur le facteur M.

Définition 5. *Soit ξ un vecteur non nul de H. On pose*
$\dim_M(H) = tr_M(E_{M'\xi}) / tr_{M'}(E_{M\xi})$.

Si M' n'est pas un facteur fini (on n'a pas de trace finie), on pose par convention $\dim_M(H) = \infty$.

Cette quantité est bien définie, car $E_{M'\xi}$ est dans M, et $E_{M\xi}$ dans M'. Von Neumann a montré que ce nombre (qui n'est pas forcément entier) est indépendant de ξ, ce qui justifie la notation.

Par convention, on posera $\dim_M(H) = \infty$ si M' n'est pas fini.

Définition 6. *On définit alors l'*indice *de N dans M par*
$[M : N] = \dim_N(H) / \dim_M(H)$.

Voici quelques propriétés des nombres $\dim_M(H)$ et $[M : N]$.

Proposition 1.
$\dim_M(H) \dim_{M'}(H) = 1$
Si $p \in M$ est un projecteur, $\dim_{pMp}(pH) = \dim_M(H) / tr_M(p)$
$\dim_{M\otimes 1}(H \otimes K) = \dim_{\mathbb{C}}(K) \dim_M(H)$
$\dim_M(H) = 1$ *si et seulement s'il existe un vecteur cyclique pour l'action de M sur H*
$[M : M] = 1$
Si $P \subset N \subset M$, $[M : P] = [M : N][N : P] \geq 1$
Si N' est fini et $N \subset M$, $[M : N] = [N' : M']$
Si $P \subset N \subset M$, $[M : P] = [M : N] \Rightarrow N = P$
$[M_1 \otimes M_2 : N_1 \otimes N_2] = [M_1 : N_1][M_2 : N_2]$
$[M : N] = \dim_N(\mathcal{L}^2(M, tr_M))$

En dimension finie, on a $\dim_{L(H)}(H) = 1/\dim_{\mathbb{C}}(H)$ qui est le rapport des dimensions sur $\mathbb{C}$.

Toujours en dimension finie, si N est le sous-facteur de $L\left(\mathbb{C}^{kn}\right)$ égal à k copies de $L(\mathbb{C}^n)$ agissant identiquement sur des sous-espaces orthogonaux de dimension n, on a simplement $\left[L\left(\mathbb{C}^{nk}\right) : N\right] = k$.

4 Espérance conditionnelle et construction de base

4.1 Espérance conditionnelle

Théorème 1. *Soit M une algèbre de von Neumann munie d'une trace finie fidèle tr, et soit N une sous-algèbre de von Neumann de M. Il existe une application $E_N : M \to N$, appelée* espérance conditionnelle*, telle que $tr(E_N(x)y) = tr(xy)$, $x \in M$, $y \in N$.*

Lemme 1. *Soient M et tr comme dans l'énoncé du théorème. Soit φ une forme linéaire sur M positive majorée par tr, i.e. $0 \leq \varphi(x) \leq tr(x)$ pour tout x de M autoadjoint positif.*

Alors il existe $s \in M$, tel que $\varphi(x) = tr(sx)$

En effet $(x, y) \mapsto \varphi(x^*y)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{L}^2(M, tr)$. Comme φ est majorée par tr, il existe un autoadjoint $A \in L(\mathcal{L}^2(M, tr)), 0 \leq A \leq 1$, tel que $\varphi(x^*y) = tr(x^*Ay))$. Si a, b, c sont dans M, on a $tr(b^*Aac) = \varphi(b^*ac) = \varphi((a^*b)^*c) = tr(b^*aAc)$. Ceci est vrai pour tous b, c dans M, qui est dense dans $\mathcal{L}^2(M, tr)$, donc A commute avec la multiplication à gauche par a, pour tout a dans M. A est donc la multiplication à droite par un élément de M, mettons s. On vérifie alors qu'on a bien $\varphi(x) = tr(sx)$.

Revenons à la preuve du théorème. Si x est un autoadjoint positif de M, $\varphi_x : y \in N \mapsto tr(xy)$ vérifie $0 \leq \varphi_x(y) \leq |x|tr(y)$ pour tout y autoadjoint positif de N, donc d'après le lemme il existe $E_N(x)$ tel que $tr(xy) = tr(E_N(x)y)$. E_N est ainsi défini sur les autoadjoints positifs de M. Comme tout élément de M s'écrit comme combinaison linéaire de tels éléments, on peut définir E_N sur M entier.

E_N vérifie aussi les propriétés suivantes : $E_N(axb) = aE_N(x)b$ si $x \in M$ et $a, b \in N$; $E_N(x^*) = E_N(x)^*$; $E_N(x^*)E_N(x) \leq E_N(x^*x)$; et si $E_N(x^*x) = 0$ alors $x = 0$.

Définition 7. *Soit ξ un vecteur cyclique de $\mathcal{L}^2(M, tr)$. On définit un projecteur orthogonal e_N par : $e_N(x\xi) = E_N(x)(\xi)$*

e_N est défini sur tout $\mathcal{L}^2(M, tr)$ par densité.

Soit J l'involution de $\mathcal{L}^2(M, tr)$ vérifiant $J(x\xi) = x^*\xi$. Alors J commute avec e_N. En effet si $x \in M$ alors :

$e_N(Jx\xi) = E_N(x^*\xi) = E_N(x)^*\xi = Je_N(x\xi)$

et les vecteurs $x\xi, x \in M$ sont denses dans $\mathcal{L}^2(M, tr)$

On a aussi les propriétés suivantes : $e_N x e_N = E_N(x)e_N$; et $N = \{M' \cup \{e_N\}\}'$.

Exemple 2. *Soit G un groupe fini d'automorphismes commutant avec l'adjonction de M. On pose $N = M^G$, i.e. N est l'ensemble des éléments de M fixes par l'action de G.*

On a alors $E_N(x) = \frac{1}{\#G} \sum_{\alpha \in G} \alpha(x)$

4.2 La construction de base : extension d'une algèbre de von Neumann

On suppose désormais que M et N sont des facteurs. Avec les mêmes notations que dans le paragraphe précédent, on appelle $< M, e_N >$ l'algèbre de von Neumann sur $\mathcal{L}^2(M, tr)$ engendrée par M et e_N.

Les propriétés de e_N montrent que $< M, e_N >= JN'J$, de sorte que comme N' est un facteur, $< M, e_N >$ est aussi un facteur.

Si $[M:N]<\infty$, on pose $\tau=[M:N]^{-1}$. $<M,e_N>$ est alors un facteur fini. En effet, $[M:N]<\infty$, donc $\dim_N(\mathcal{L}^2(M,tr))<\infty$, donc N' est fini. Comme $<M,e_N>=JN'J$, $<M,e_N>$ est fini.

Sa trace normalisée Tr prolonge la trace sur M, et vérifie $Tr(e_N x)=\tau tr(x)$ pour $x\in M$. En effet $y\mapsto Tr(e_N y)$ définit une trace sur N, qui est un facteur, donc il existe une constante c telle que $Tr(e_N y)=ctr(y)$ si $y\in N$. Si $x\in M$, $Tr(e_N x)=Tr(E_N(x)e_N)=tr(e_N)tr(x)=ctr(x)$. Reste à voir que $c=[M:N]^{-1}$. Or $c=Tr(e_N)$, et par définition la trace de e_N dans N' est $[M:N]^{-1}$. Comme $<M,e_N>=JN'J$ et J commute avec e_N, on a $Tr(e_N)=[M:N]^{-1}$.

De plus, $[<M,e_N>:M]=[M:N]$.

Après l'extension, on se retrouve ainsi dans une situation tout à fait similaire à la situation initiale : on a une sous-algèbre M de l'algèbre $<M,e_N>$. On peut donc réitérer la construction précédente, et construire l'extension $<<M,e_N>,e_M>$ agissant sur $\mathcal{L}^2(<M,e_N>,tr_{<M,e_N>})$.

e_N et e_M vérifient alors les propriétés de commutation suivantes : $e_N e_M e_N=\tau e_N$, et $e_M e_N e_M=\tau e_M$.

4.3 Combinatoire des projecteurs

On considère une algèbre de von Neumann M munie d'une trace finie fidèle tr. On suppose qu'il existe dans M une famille de projecteurs orthogonaux $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$, vérifiant les propriétés suivantes :

1. $e_i e_{i\pm i} e_i=\tau e_i$
2. $e_i e_j=e_j e_i$ dès que $|i-j|>1$
3. $tr(we_i)=\tau tr(w)$ si w est un mot sur $1,e_1,\dots,e_{i-1}$

Cette situation peut être obtenue par exemple en itérant la construction du paragraphe précédent.

Posons $s_n=e_1\vee\cdots\vee e_n$. Alors si $s_n\neq 1$, $e_{n+1}\wedge s_n=e_{n+1}s_{n-1}$

Si $tr(s_n)>0$, autrement dit si $s_n\neq 1$, on a donc

$tr(1-s_{n+1})=tr(1)-tr(s_n\vee e_{n+1})=tr(1)-tr(s_n)-tr(e_{n+1})+tr(s_n\wedge e_{n+1})=tr(1-s_n)-tr(e_{n+1}(1-s_{n-1}))=tr(1-s_n)-\tau tr(1-s_{n-1})$

On a aussi $tr(1-s_1)=1-\tau$ et $tr(1-s_2)=1-2\tau$

4.4 Restrictions sur la valeur de τ

On est ainsi amené à définir les polynômes P_n par $P_0(x)=0$, $P_1(x)=1$ et $P_{n+1}(x)=P_n(x)-xP_{n-1}(x)$, de sorte que si $P_{k+2}(\tau)>0\ \forall k\leq n$, alors $P_{k+2}(\tau)=tr(1-s_k)$.

Si $\sigma_1(x)$ et $\sigma_2(x)$ sont les deux racines de l'équation caractéristique associée $\sigma^2 = \sigma - x$, on a alors $P_n = \frac{\sigma_1^n - \sigma_2^n}{\sigma_1 - \sigma_2}$ et (en posant $\sigma_1 = e^{i\theta}$) $P_n\left(\frac{1}{4\cos^2\theta}\right) = \frac{\sin n\theta}{2^{n-1}\cos^{n-1}\theta\sin\theta}$.

La plus petite racine de P_n est donc $\frac{1}{4\cos^2\frac{\pi}{n}}$, et $P_n(\tau)$ est positif pour $\tau < \frac{1}{4\cos^2\frac{\pi}{n}}$ et négatif pour $\frac{1}{4\cos^2\frac{\pi}{n}} < \tau < \frac{1}{4\cos^2\frac{\pi}{n-1}}$.

Ceci implique immédiatement des restrictions sur la valeur de τ. En effet, si τ est supérieur à $1/4$ et $\tau \neq \frac{1}{4\cos^2\frac{\pi}{n}}$, $n = 3, 4\ldots$, alors il existe $k \geq 3$ tel que $\frac{1}{4\cos^2\frac{\pi}{k+1}} < \tau < \frac{1}{4\cos^2\frac{\pi}{k}}$. Par conséquent $P_{k+1}(\tau) < 0$, et $P_n(\tau) > 0$ si $n < k+1$. Cela signifie que $P_{k+1}(\tau) = tr(1 - s_{k-1})$, or $1 - s_{k-1}$ est un projecteur et a donc une trace positive.

Théorème 2. *Les valeurs possibles de τ sont les valeurs inférieures à* $1/4$ *et les valeurs* $\frac{1}{4\cos^2\frac{\pi}{k}}$, $k \geq 3$.

Pour les autres valeurs, il n'existe pas d'algèbres de projecteurs vérifiant les relations des e_i.

5 Indice d'un sous-facteur, suite

5.1 Les valeurs prises par l'indice

Soient $N \subset M$ deux facteurs de type II_1, d'indice $[M : N]$ fini. Posons $M_0 = M$, $M_1 =< M, e_N >$, et $M_{i+1} =< M_i, e_{M_{i-1}} >$. Si E est la réunion des M_i, alors E et la suite de projecteurs e_{M_i} vérifient les conditions du paragraphe 4.3, avec $\tau = [M : N]^{-1}$. Les restrictions sur τ montrent qu'on a $[M : N] \geq 4$ ou $[M : N] = 4\cos^2\frac{\pi}{n}, n \geq 3$.

Soit P l'algèbre de von Neumann engendrée par 1 et les $e_i, i \in \mathbb{N}$, et P_τ l'algèbre de von Neumann engendrée par 1 et les $e_i, i \geq 2$. On peut prouver (mais cela n'a rien d'évident) que P et P_τ sont des facteurs de type II_1 vérifiant $[P : P_\tau] = \tau^{-1}$.

Si on parvient, pour une valeur de τ, à construire une suite de projecteurs comme dans le paragraphe précédent, cela nous permettra de construire des inclusions de facteurs d'indice τ^{-1}. Nous allons voir dans cette section comment construire une tour de projecteurs avec $\tau^{-1} = 4\cos^2\frac{\pi}{n}, n \geq 3$.

5.2 Inclusion des algèbres de von Neumann de dimension finie

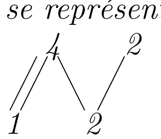
Comme nous l'avons déjà vu, la structure des algèbres de von Neumann en dimension finie est très simple : il s'agit de copies de $M_n(\mathbb{C})$. On cherche à représenter la manière dont une algèbre de von Neumann s'injecte dans une autre en dimension finie.

Soient N, M deux algèbres de von Neumann agissant sur un espace de dimension finie, et supposons que N s'injecte dans M, de sorte que N soit une sous-algèbre de von Neumann de M. On pose $M = \bigoplus_{i=1}^{m} M_i,\ M_i \sim M_{m_i}(\mathbb{C})$ et $N = \bigoplus_{i=1}^{n} N_i,\ N_i \sim M_{n_i}(\mathbb{C})$.

On décrit l'inclusion par une matrice $n \times m$. Considérons deux espaces N_j et M_i. L'intersection de N_j avec M_i est une sous-algèbre de von Neumann de M_i, isomorphe (si elle n'est pas vide) à $M_{n_j}(\mathbb{C})$. Elle est donc identique à k copies identiques de $M_{n_j}(\mathbb{C})$. On pose alors $a_{i,j} = k$. On appelle A_N^M la matrice $(a_{i,j})$. On a l'égalité : $m_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} n_i$.

L'inclusion de N dans M peut aussi être décrite par un diagramme, dit diagramme de Bratelli. On écrit sur la ligne du haut les m_i, et sur la ligne du bas les n_i, et on trace $a_{i,j}$ lignes de n_j à m_i.

Exemple 3. *L'inclusion de* $N = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A \end{pmatrix} a \in \mathbb{C}, A \in M_2(\mathbb{C}) \right\}$
dans $M = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} A \in M_4(\mathbb{C}), B \in M_2(\mathbb{C}) \right\}$
se représente par le diagramme :



Une trace sur $M = \bigoplus_{i=1}^{m} M_i$ peut être décrite par le vecteur $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_m)$ où t_j est la trace d'un projecteur minimal de M_j.

Si $\vec{s}$ définit la trace sur N, les deux traces coïncident sur N si et seulement si $\vec{s} = A_N^M \vec{t}$

5.3 Prolongement de la trace

Soient $N \subset M$ deux algèbres de von Neumann de dimension finie. On définit $< M, e_N >$, comme dans le paragraphe précédent.

On a alors $A_M^{<M,e_N>} = {}^t A_N^M$

Pour que la trace normalisée Tr sur $< M, e_N >$ prolonge la trace sur M, et vérifie $Tr(e_N x) = \tau tr(x)$ pour $x \in M$, il suffit que les vecteurs $\vec{s}$ et $\vec{t}$ définissant la trace sur N et M respectivement vérifient :

${}^t A_N^M A_N^M \vec{t} = \tau^{-1} \vec{t}$

$A_N^M {}^t A_N^M \vec{s} = \tau^{-1} \vec{s}$

L'égalité $A_M^{<M,e_N>} = {}^t A_N^M$ montre que si on peut prolonger la trace de M sur $< M, e_N >$ comme précédemment, on pourra aussi la prolonger de $< M, e_N >$ sur $<< M, e_N >, e_M >$, et ainsi de suite.

5.4 Construction de sous-facteurs d'indice $4\cos^2 \frac{\pi}{n}$

Soit $n \geq 3$, et N l'algèbre de von Neumann constituée de la somme directe de n copies de $\mathbb{C}$.

Soit A la matrice de $M_n(\mathbb{C})$ telle que $a_{i,j} = 1$ si $|i - j| = 1$, et 0 sinon.

Soit enfin M une algèbre de von Neumann de dimension finie contenant N et telle que $A_N^M = A$.

On peut vérifier que $A^t A$ admet un vecteur propre $\vec{t}$ dont toutes les coordonnées sont des réels strictement positifs, correspondant à la valeur propre $\frac{1}{4\cos^2 \frac{\pi}{n}}$. On définit alors la trace sur M par le vecteur $\vec{t}$, et la trace sur N par le vecteur $\vec{s} = A\,\vec{t}$.

Si on construit une suite de projecteurs comme au paragraphe 5.1, on obtient deux facteurs $P_{\frac{1}{4\cos^2 \frac{\pi}{n}}} \subset P$, tels que $[P : P_{\frac{1}{4\cos^2 \frac{\pi}{n}}}] = 4\cos^2 \frac{\pi}{n}$.

6 Noeuds et polynôme de Jones

6.1 Le groupe des tresses

L'algèbre des e_i construite précédemment a des applications en théorie des noeuds. C'est à partir d'elle que le polynôme de Jones, un des meilleurs invariants de noeuds actuellement connus, a été construit.

L'analogie entre cette algèbre et les noeuds se fait au travers du groupe des tresses. Une *tresse* est un ensemble constitué d'un nombre fixé de *brins* qui partent d'un plan de $\mathbb{R}^3$ et avancent vers un autre plan de $\mathbb{R}^3$, parallèle au premier, sans que deux brins passent par le même point (fig. 1). On considère les tresses modulo la relation intuitive de "déformation" d'une tresse en une autre. Plus précisément, l'ensemble des tresses à n brins est

$$B_n = \Pi_1 \left(\left(\left(\mathbb{R}^2\right)^n \setminus \Delta \right) / S_n \right)$$

où $\Delta = \left\{ (x_1 \ldots x_n) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^n, \exists i, j,\ 1 \leq i < j \leq n, x_i = x_j \right\}$ et où S_n, le groupe symétrique d'ordre n, agit sur $\left(\mathbb{R}^2\right)^n$ par permutation des points. Π_1 désigne le groupe fondamental.

Les tresses forment un groupe pour la concaténation. L'inverse d'une tresse est son symétrique dans un miroir (preuve graphique).

Il est possible d'obtenir une présentation algébrique du groupe des tresses. Si on note σ_i la tresse qui fait seulement passer le i-ième brin sur le $i+1$-ième, on a les relations $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$ et $i - j \geq 2 \Rightarrow \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$. Le groupe B_n est alors le groupe engendré par $\sigma_1, \ldots \sigma_{n-1}$, caractérisé par les deux relations ci-dessus.

Cette relation $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$ est analogue à la relation $e_ie_{i\pm1}e_i = \tau e_i$ étudiée précédemment. En fait, on peut représenter le groupe des tresses dans l'algèbre des e_i : il suffit de poser $\sigma_i = (t+1)e_i - 1$, où $\tau^{-1} = 2 + t + t^{-1}$ (pour σ_i^{-1}, remplacer simplement t par $1/t$). Les relations définissant le groupe des tresses sont alors vérifiées.

6.2 Construction du polynôme de Jones

Le glissement vers la théorie des noeuds se fait au travers de la *fermeture* d'une tresse : dans l'espace, on rejoint le bout du i-ième brin de départ de la tresse au bout du i-ième brin d'arrivée (fig. 2). On obtient ainsi un noeud. Un théorème affirme que tout noeud dans $\mathbb{R}^3$ peut être mis sous la forme de la fermeture d'une tresse (il existe un procédé algorithmique de transformation), de manière évidemment non unique. L'étude de l'égalité des noeuds se réduit donc à celle de l'égalité des fermetures de tresses. Intervient alors un autre théorème : les deux transformations de tresses fermées qui consistent, premièrement à rajouter une tresse au début et son inverse à la fin, deuxièmement à rajouter un brin et un $\sigma_n^{\pm1}$ à la fin ($\alpha \in B_n \mapsto \beta\alpha\beta^{-1} \in B_n$ et $\alpha \in B_n \mapsto \alpha\sigma_n^{\pm1} \in B_{n+1}$, fig. 3) suffisent pour passer, étant donné un noeud, d'une de ses représentations en tresse fermée à une quelconque autre.

Le problème principal de la théorie des noeuds est la recherche d'un invariant de noeuds qui distingue le plus de noeuds possible. La traduction des noeuds en tresses fermées, puis l'injection de celles-ci dans l'algèbre des e_i, incitent à utiliser la trace. Pour obtenir un invariant de noeuds, il faudra simplement vérifier l'invariance sous les transformations $\alpha \in B_n \mapsto \beta\alpha\beta^{-1} \in B_n$ et $\alpha \in B_n \mapsto \alpha\sigma_n^{\pm1} \in B_{n+1}$.

Si N est un noeud représenté par la tresse (fermée) α, ceci peut être obtenu en posant

$$V_N(t) = \left(-\frac{t+1}{\sqrt{t}}\right)^{n-1} \left(\sqrt{t}\right)^{e(\alpha)} tr(\alpha)$$

où $e(\alpha)$ est la somme des exposants intervenant dans la décomposition de α en produit de σ_i, et où α est assimilé à son image dans l'algèbre des e_i. Ceci est le *polynôme de Jones* ; sa construction initiale par Jones a bien suivi ce chemin.

Les propriétés des e_i permettent en outre de déduire une formule de récurrence pour calculer graphiquement le polynôme de Jones d'un noeud. Écrivant $e_i^2 = e_i$, on trouve $\sigma_i^2 = (t-1)\sigma_i + t$. Alors, si $\beta, \beta' \in B_n$, $\alpha_0 = \beta\beta'$, $\alpha_+ = \beta\sigma_i\beta'$ et $\alpha_- = \beta\sigma_i^{-1}\beta'$, on obtient $\frac{1}{t}V_{\alpha_+}(t) - tV_{\alpha_-}(t) = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)V_{\alpha_0}(t)$.

Cette relation graphique (fig. 4) permet, dans le calcul du polynôme associé à un noeud, de remplacer un croisement du noeud par son inverse (et de calculer le polynôme pour un noeud ayant un croisement de moins), ce qui permet de simplifier le noeud et de mener aisément le calcul.

7 Conclusion

Jones a donc réussi, à partir de la construction de base consistant à étendre un facteur par une espérance conditionnelle, à obtenir des restrictions sur les valeurs possibles de l'indice d'un sous-facteur de type II_1, et à construire les exemples correspondants. Mieux, l'étude des objets ainsi introduits l'a conduit à inventer un des plus fins invariants de noeuds connus.

Cependant, le sujet est loin d'être clos. Par exemple, on ignore quelles sont les valeurs possibles pour l'indice d'un sous-facteur si l'on impose que le commutant relatif du sous-facteur soit trivial. On est aussi très loin d'une classification des sous-facteurs possibles avec un indice donné.

Références

[1] J. Dixmier : Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien, Gauthier-Villars, 1957

[2] V. F. R. Jones, Index for subfactors, Invent. math. 72 (1983), 1-25

[3] V. F. R. Jones, A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras, Bull. AMS 12 (1985), 103-111

[4] V. F. R. Jones, Subfactors and knots, publ. AMS, CBMS, 1991