

Notions de cohomologie

Édité par Yann Ollivier et Joël Riou

Groupe de travail 2000–2001, ENS

Ce fascicule est la réunion des notes des exposés réalisés lors du groupe de travail « cohomologies » que nous avons organisé à l'École normale supérieure pendant l'année scolaire 2000–2001.

En projetant ce groupe de travail, notre but était de cerner les mécanismes communs qui rendent efficaces, dans des domaines très variés, les différentes notions de cohomologie.

Cette compilation s'adresse à des lecteurs ayant déjà une petite expérience d'une théorie cohomologique, mais sans plus, par exemple la cohomologie singulière ou la cohomologie de De Rham. Nous n'abordons pas les théories cohomologiques les plus savantes (cohomologie étale, motivique...).

Nous avons simplement essayé d'illustrer, sur des exemples les plus variés possibles, le fonctionnement du « truc » cohomologique, qui, malgré les incompatibilités formelles des théories, reste immédiatement reconnaissable derrière chacun de ses avatars. Nous donnons également un aperçu des nombreux théorèmes d'isomorphisme existants entre différentes définitions.

Les champs étudiés vont des variétés différentielles à la théorie des groupes, de l'algèbre homologique à la théorie des représentations. Nous espérons qu'ainsi chacun pourra y trouver son compte...

Yann Ollivier, Joël Riou

Table des matières

Cohomologies		
Yann Ollivier		10
(Co)homologie singulière		
Joël Riou		18
1	Rappels d'algèbre homologique	18
1.1	Catégories, foncteurs, transformations naturelles	18
1.2	Modules différentiels gradués	19
1.3	Foncteur H_*	20
1.4	Passage terminologique	21
1.5	Homotopies	21
1.6	Suite exacte longue de cohomologie associée à une suite exacte courte de complexes de cochaînes	21
2	Compléments d'algèbre homologique	23
2.1	Théorème des modèles acycliques	23
3	Homologie et cohomologie singulière	27
3.1	Construction	27
3.2	Lemmes (techniques) concernant le foncteur C_*	29
3.3	Propriétés principales des foncteurs C_* , $H_*(-; A)$, $H^*(-; G)$	31
4	Structures multiplicatives	37
4.1	Produit croisé d'homologie	37
4.2	Produit croisé de cohomologie	37
4.3	\cup produit	38
4.4	\cap produit	38
5	Calculs	39
5.1	Introduction des foncteurs $\tilde{C}_*(-)$, $\tilde{H}_*(-)$, et $\tilde{H}^*(-, G)$	39
5.2	Exercices	40

Le théorème de De Rham et la dualité de Poincaré

Charles-Antoine Louët	42
1 Introduction	42
1.1 Un peu d'histoire	42
1.2 Quelques complexes	43
1.3 Une technique de démonstration	43
2 Quelques outils	44
2.1 L'homologie de la limite et... la limite des homologies	44
2.2 Un peu d'algèbre : la limite projective et son premier foncteur dérivé . .	45
2.3 Un peu de topologie	49
3 Trois démonstrations	50
3.1 Le théorème de De Rham	50
3.2 La dualité de Poincaré	51
3.3 (Co)homologies singulières lisse et non lisse	52

Le théorème d'unicité d'Eilenberg-Steenrod

Yann Ollivier	54
1 Théories homologiques	54
2 Étapes de la démonstration	55

Quelques résultats sur la caractéristique d'Euler

Julien Marché	58
1 Notations et définitions	58
2 Théorie de Morse	59
2.1 Propriétés principales	59
2.2 Inégalités de Morse	61
2.3 Conséquences	62
3 L'application de Gauss	63
3.1 Préliminaires	63
3.2 Conséquences	64
4 La classe de Thom	65
4.1 Définition et propriétés	65
4.2 Liens avec la caractéristique d'Euler	66
5 Application aux champs de vecteurs	67
5.1 Théorème fondamental	67
5.2 Indice d'un champ de vecteurs	69
5.3 Généralisation	70
6 Applications et compléments	70
6.1 Existence de champ de vecteurs	70
6.2 Existence de structure minkovskienne	71

6.3	Une application aux groupes de Lie	72
7	Une méthode plus cohomologique : la dualité de Poincaré	73
7.1	Dual d'une sous-variété	73
7.2	Application à la caractéristique d'Euler	73
7.3	Une généralisation : la formule des traces de Lefschetz	75
7.4	Exemple	75

Cohomologie de Čech des faisceaux

Yann Ollivier		76
1	Le départ : homologie de Čech d'un complexe	76
2	Cohomologie de Čech des faisceaux	77
2.1	Rappels sur les faisceaux	77
2.2	Définition de la cohomologie de Čech	78
2.3	Premières propriétés	80
2.4	Le théorème de De Rham	81
3	Première classe de Chern	82
3.1	Fibrés en droites réelles	82
3.2	Rappels sur les variétés complexes	84
3.3	Fibrés en droites complexes et leur première classe de Chern	86
3.4	Courbure et première classe de Chern	87

Cohomologie des groupes

Gaëtan Chenevier		90
1	Extensions dans le cas abélien	90
1.1	Cohomologie des groupes, définition rapide	90
1.2	Classification	91
1.3	Application : le théorème de Schur-Zassenhaus	93
1.4	Application : les groupes d'ordre p^3	93
2	Extensions générales	94
2.1	Classification des extensions	94
2.2	Interlude : la résolution de Gruenberg	96
2.3	Obstruction	97
3	Le H^2 comme obstruction à l'extension des représentations	98
4	Groupe de Brauer	100
4.1	Motivations	100
4.2	Groupe de Brauer et cohomologie	101
4.3	Applications	104

Cohomologie des groupes

	Jérôme Plût	106
1	Définitions et notations	106
1.1	Représentations d'un groupe G	106
1.2	Invariants et coinvariants	107
1.3	Produit tensoriel, homomorphismes	107
1.4	Opérations sur les complexes	108
2	CW-complexes	108
2.1	Définitions	108
2.2	Homologie	109
2.3	Propriétés importantes	109
2.4	Revêtements galoisiens	110
2.5	Espaces d'Eilenberg-Mac Lane	111
2.6	Construction du $K(G, 1)$	112
2.7	Classifiant ; construction de Milnor	113
3	Homologie des groupes	115
3.1	Résolutions	115
3.2	Homologie	116
3.3	Interprétation topologique	116
4	Homologie et cohomologie avec coefficients	117
4.1	Homologie	117
4.2	Cohomologie	117
4.3	Interprétations topologiques	118
4.4	Exemples	119

Introduction aux foncteurs dérivés

	Joël Riou	122
1	Catégories abéliennes	122
2	Foncteurs dérivés	124
2.1	Contexte	124
2.2	Résolutions	125
2.3	Construction	126
2.4	Bifoncteurs	128
2.5	Résolutions acycliques	128
2.6	Foncteurs dérivés et homologie	129
3	Lien entre les extensions et $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1$	130
4	Semi-simplicité, Ext -dimension	132
4.1	Modules semi-simples	132
4.2	Ext -dimension	134
4.3	Ext -dimension 0 : théorème de Wedderburn	135

5	Tor-dimension	137
6	Anneaux principaux	139
7	Formule de Künneth	139
8	Théorème des coefficients universels	140
9	Exercices	140
9.1	Une reformulation du lemme du serpent	140
9.2	Limites projectives	141
9.3	Exercice faussement géométrique	141
9.4	Quelques calculs	142
9.5	Extensions	142
9.6	Tor de faisceaux	142
9.7	Un peu de géométrie algébrique	143
La propriété (T) de Kazhdan, interprétation cohomologique		
	François Alter	144
1	Propriété (T) de Kazhdan	144
2	Propriété (FH) de Serre	147
2.1	Actions affines et représentations	148
2.2	Cohomologie	148
3	(FH) \Rightarrow (T)	149
4	(T) \Rightarrow (FH)	150
Bibliographie générale		155

Cohomologies

Yann Ollivier

Ce texte est une présentation rapide et informelle des différentes notions de cohomologies qui seront exposées lors du groupe de travail, ainsi que de leurs motivations originelles et de quelques applications. Il tient lieu de présentation des exposés de ce recueil.

Petit historique

C'est dans un article de 1895 que Poincaré définit pour la première fois, sur les variétés différentielles, des chaînes (ou sous-variétés) qu'il qualifie d'*homologues*. Sa définition était assez imprécise, mais la notion qu'il utilisait recouvrait exactement l'acceptation actuelle : deux chaînes fermées sont homologues si leur différence est un bord.

Cependant, le texte de Poincaré ne faisait pas apparaître de cohomologie. La raison en est que sur une variété, on peut, par dualité de Poincaré, ramener complètement la cohomologie à l'homologie.

Les travaux de Poincaré ne restèrent pas inaperçus, mais ne furent pas repris avant les années 20. Durant la vingtaine d'années qui suivirent, différentes théories (co)homologiques plus ou moins générales et plus ou moins concurrentes émergèrent (simpliciale, singulière, Čech...).

Le passage de l'homologie à la cohomologie était au départ une tentative de généralisation de la dualité de Poincaré. De manière très surprenante, les structures multiplicatives présentes sur les variétés différentiables se transposent très bien dans des situations plus abstraites en cohomologie (ce que l'homologie ne permet pas du tout).

Les années 40 virent l'apparition de l'algèbre homologique. Celle-ci contribua largement à l'apparition des notions de catégorie et de foncteur, omniprésentes en algèbre et en logique par la suite. L'invention de la cohomologie des faisceaux par Leray a eu le même succès dans toute la géométrie algébrique.

Diverses généralisations ont été imaginées : cohomologie des groupes (avec des connexions surprenantes avec la géométrie), cohomologie bornée, cohomologie équivariante, cohomologie étale... ce qui montre si besoin était que les notions cohomologiques se sont largement répandues dans presque toutes les mathématiques, et parfois jusqu'à la physique théorique.

Par la suite, on supposera connues l'homologie et la cohomologie singulières, auxquelles on se référera en l'absence de précision sur la théorie homologique utilisée (premier exposé de Joël

Riou).

La dualité de Poincaré et les structures multiplicatives

Dualité de Poincaré (exposé de Charles-Antoine Louët). Sur une variété différentiable orientée, on peut établir une correspondance très visuelle entre homologie et cohomologie. En effet, si a et b sont deux chaînes de dimensions complémentaires, on peut définir leur *nombre d'intersection* $a \star b$, comme le nombre de points d'intersection de a et b .

Cette définition n'a de sens que si a et b sont lisses et placés en position générique (les points d'intersection sont alors isolés et non dégénérés); mais on peut démontrer que ces conditions peuvent être réalisées à l'intérieur de toute classe d'homologie. Si en outre, on compte chaque point d'intersection avec un signe ± 1 , en utilisant l'orientation de la variété, le nombre $a \star b$ ne dépend que des classes d'homologie de a et b .

Par dualité, on peut ainsi obtenir une cochaîne connaissant une chaîne : la cochaîne a^* associée à a étant naturellement définie par $a^*(b) = a \star b$.

Ceci définit une correspondance entre homologie et cohomologie. On peut aller plus loin : si la somme des dimensions de a et b est supérieure à la dimension n de la variété ambiante, l'intersection $a \cap b$ sera, en position générique, une sous-variété de dimension $\dim a + \dim b - n$. En comptant cette sous-variété avec les bons signes, on obtient une chaîne en homologie, qui ne dépend que des classes d'homologie de a et b . En passant aux duals a^* et b^* , et en notant $p = n - \dim a$, $q = n - \dim b$, on a ainsi défini une application bilinéaire de $H^p \times H^q$ vers H^{p+q} . C'est la structure multiplicative de la cohomologie.

Structures multiplicatives (premier exposé de Joël Riou). Il est possible de généraliser ceci à une cohomologie quelconque, pas forcément sur une variété. Les résultats ne sont cependant pas aussi simples que ce que l'approche « naïve » peut laisser espérer : on a presque des isomorphismes, mais avec des termes supplémentaires.

Dans tout ce paragraphe, A sera un anneau principal et M, N des A -modules. Tout le problème vient du fait qu'en général, on n'obtient pas une suite exacte si on tensorise une suite exacte par un même module, ou si on prend les morphismes vers un même module. Il est nécessaire d'ajouter des termes. Pour tout couple de modules M et N , on peut définir des modules $\text{Tor}(M, N)$ et $\text{Ext}(M, N)$ et un opérateur ∂ ayant la propriété suivante : si

$$0 \rightarrow M \rightarrow M' \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

est une suite exacte, alors

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \text{Tor}(M, N) & \rightarrow & \text{Tor}(M', N) & \rightarrow & \text{Tor}(M'', N) \\ & & \xrightarrow{\partial} & & & & \\ & & M \otimes N & \rightarrow & M' \otimes N & \rightarrow & M'' \otimes N \rightarrow 0 \end{array}$$

ainsi que

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \leftarrow & \text{Ext}(M, N) & \leftarrow & \text{Ext}(M', N) & \leftarrow & \text{Ext}(M'', N) \xleftarrow{\partial} \\ & & \text{Hom}(M, N) & \leftarrow & \text{Hom}(M', N) & \leftarrow & \text{Hom}(M'', N) \leftarrow 0 \end{array}$$

sont exactes.

Si les modules en question sont libres, ces contributions supplémentaires se réduisent à 0.

Ceci ouvre la voie à toutes les tensorisations dont on rêvait, par exemple pour calculer la cohomologie à valeurs dans M connaissant celle à valeurs dans A : on a une suite exacte

$$0 \rightarrow H_n(X, A) \otimes M \rightarrow H_n(X, M) \rightarrow \text{Tor}(H_{n-1}(X, A), M) \rightarrow 0$$

ainsi que

$$0 \leftarrow \text{Hom}(H^n(X, A), M) \leftarrow H^n(X, M) \leftarrow \text{Ext}(H_{n-1}(X, A), M) \leftarrow 0$$

cette dernière ne faisait qu'exprimer le fait que la cohomologie est le dual de l'homologie...

L'étape suivante pour obtenir de belles structures multiplicatives sur la cohomologie est d'arriver à envoyer le produit des cohomologies de deux espaces dans la cohomologie de l'espace produit. Pour la cohomologie singulière, cela se fait en prenant le produit des simplexes (qui n'en est pas un) et en décomposant le résultat en simplexes... Ne seraient les problèmes de torsion, on obtiendrait un isomorphisme, mais on écope d'une suite exacte (théorème de Künneth), qui plus est valable uniquement si l'un des deux espaces a une cohomologie de rang fini :

$$0 \rightarrow \bigoplus_{p+q=n} H^p(X) \otimes H^q(Y) \rightarrow H^n(X \times Y) \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{p+q=n+1} \text{Tor}(H^p(X), H^q(Y)) \rightarrow 0$$

En particulier, en prenant $X = Y$ et en composant par l'application diagonale $X \rightarrow X \times X$, on obtient une structure d'anneau sur la cohomologie :

$$H^p(X) \otimes H^q(X) \rightarrow H^{p+q}(X)$$

qui généralise la construction de Poincaré sur les variétés différentielles. En gros, dans le cas de la cohomologie singulière, ce produit consiste, étant données deux cochaînes f, g de degrés p, q et une chaîne σ de degré $p + q$, à faire agir f sur le début de σ et g sur la fin de σ .

La multiplication des théories et les théorèmes d'isomorphisme

Cohomologie de De Rham . Diverses constructions cohomologiques ont été proposées. L'une des plus importantes est la cohomologie de De Rham sur les variétés différentiables (utilisée dans divers exposés).

On considère l'espace tangent d'une variété (l'espace des vecteurs infiniment petits en un point). On appelle d -forme une forme d -linéaire antisymétrique sur cet espace (par exemple, dx est une 1-forme sur \mathbb{R}).

On définit la différentielle ∂f d'une d -forme f comme une $d + 1$ -forme dont la valeur sur des vecteurs X_0, \dots, X_d est obtenue comme suit : on construit sur X_0, \dots, X_d un $(d + 1)$ -parallélogramme infinitésimal dans la variété ; chacune de ses faces est supportée par d vecteurs, et donc, on peut calculer f sur ces faces ; on forme la somme de f sur toutes les faces (avec des signes alternés ; c'est plutôt une différence), et on divise par le volume infinitésimal du parallélogramme. La valeur obtenue est $(\partial f)(X_0, \dots, X_n)$, sorte de dérivée de f .

Si f est une d -forme, on peut l'intégrer sur une partie (lisse) de dimension d de notre variété. Avec ces définitions, on a, en particulier, la formule de Stokes : si X est une partie de la variété qui est le bord d'une partie Y , l'intégrale sur X de f est égale à l'intégrale de ∂f sur le bord de Y . (C'est une généralisation des formules de Green, d'Ostrogradski...)

Maintenant, on peut donner les définitions habituelles : une forme f est dite fermée si $\partial f = 0$ (son intégrale sur le bord d'une partie de X sera nulle). Le quotient des d -formes fermées par les différentielles des $(d - 1)$ -formes est le d -ième groupe de cohomologie de De Rham H_{DR}^d de notre variété. Par exemple, la cohomologie de De Rham du cercle, en degré 1, est engendrée par la forme $d\theta$.

La cohomologie ainsi définie vérifie toutes les propriétés usuelles. Le théorème de De Rham dit qu'elle est isomorphe à la cohomologie singulière à coefficients dans \mathbb{R} .

Les théorèmes d'isomorphisme et l'unicité de la cohomologie. D'autres variantes de théories cohomologiques ont été définies. Pour tous les espaces simples, elles donnent des résultats identiques. Ceci n'est pas un hasard : si on appelle théorie homologique une théorie qui à certaines paires d'espaces topologiques (X, A) associe de manière fonctorielle et invariante par homotopie un G -module gradué $H_*(X, A; G)$, de sorte que la suite exacte d'une paire, l'homologie du point et la propriété d'excision soient vérifiées, alors on a (théorème d'isomorphisme d'Eilenberg-Steenrod) :

Soient H_* et \mathcal{H}_* deux théories homologiques à coefficients dans G et \mathcal{G} , et soit $\varphi : G \rightarrow \mathcal{G}$ un morphisme de groupes. Alors pour tout complexe simplicial fini X , pour tout $A \subset X$ (donc pour tout espace topologique finiment triangulable), on a un unique morphisme de modules différentiels gradués de $H_*(X, A)$ dans $\mathcal{H}_*(X, A)$, covariant en (X, A) , confondu avec φ si X est un point. De plus, si φ est un isomorphisme, ce morphisme aussi.

Ce théorème assure donc l'unicité de la théorie (co)-homologique sur les espaces finiment triangulables.

Il existe d'autres moyens d'aborder l'unicité. Ainsi, le théorème des modèles acycliques (premier exposé de Joël Riou) garantit par exemple qu'une théorie de l'homologie singulière bâtie sur des carrés plutôt que sur des simplexes donnera le même résultat. Le théorème de De Rham garantit que la cohomologie éponyme est la même que la cohomologie singulière (exposé de Charles-Antoine Louët) ou celle de Čech (exposé de Yann Ollivier).

Généralisations et applications

Nous présentons ici quelques exemples d'application, soit directe des théories cohomologiques existantes, soit de généralisation à partir des idées cohomologiques dans des situations différentes.

Notons que toutes les généralisations montrent clairement la supériorité de la cohomologie sur l'homologie ; les analogues homologiques de ces extensions n'existent parfois même pas. Ceci doit sans doute être attribué au fait que la cohomologie permet de tirer entièrement parti de la structure de l'espace des coefficients.

Caractéristique d’Euler et théorèmes de points fixes (exposé de Julien Marché). Pour un polyèdre, un graphe planaire, ou une surface triangulée, on définit depuis bien longtemps la caractéristique d’Euler comme la somme $S - A + F$ où S est le nombre de sommets, A le nombre d’arêtes et F le nombre de faces. Dans le cas d’un polyèdre, cela vaut toujours 2, toujours 1 pour un graphe planaire ; dans le cas d’une surface, le résultat est indépendant de la triangulation choisie, et vaut 2 moins 2 fois le nombre de trous de la surface.

La quantité $\chi(X) = \sum (-1)^i \dim H^i(X, \mathbb{R})$ généralise la formule précédente. Elle est reliée à de nombreuses propriétés géométriques de l’espace X . Par exemple, le nombre des zéros d’un champ de vecteurs sur une variété, comptés avec leur indice (nombre de fois où le champ tourne autour du zéro en question), est égal, pour tout champ de vecteurs, à la caractéristique d’Euler. Une formule analogue relie le nombre de points fixes d’une application f de X dans X à la somme alternée des traces de f sur les groupes de cohomologie.

Cohomologie de Čech des faisceaux (exposé de Yann Ollivier). À l’origine de cette théorie, on trouve des problèmes de recollements. Si on a un recouvrement d’un espace topologique, si on a des fonctions définies sur chaque partie du recouvrement, et si ces fonctions se recollent bien sur chaque intersection de parties du recouvrement, alors on peut définir un objet global sur tout l’espace, qui sera un élément de la cohomologie de l’espace à valeurs dans notre espace de fonctions.

Par ailleurs, il peut être intéressant de regarder la cohomologie à valeurs dans un espace qui pourrait varier d’un endroit à un autre. Si on a par exemple un quotient Y d’un espace $X : \pi : X \rightarrow Y$, on peut vouloir obtenir des informations sur la cohomologie de X à partir de la cohomologie de Y et, en tout point $y \in Y$, de la cohomologie de la fibre $\pi^{-1}(y)$.

Ces considérations amènent à la définition des faisceaux. Un faisceau \mathcal{F} sur un espace topologique X est une application qui à chaque ouvert U de X associe un groupe $\mathcal{F}(U)$, dont les éléments sont appelés sections au-dessus de U , en même temps qu’une opération de restriction $\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$, pour $V \subset U$, vérifiant que si $U \supset V \supset W$, alors $\rho_{VW} \circ \rho_{UV} = \rho_{UW}$. On demande en outre deux conditions de recollement : pour deux sections sur U et V , qui coïncident sur $U \cap V$, il existe une section sur $U \cup V$ qui se restreint sur ces deux-là ; en outre, toute section sur $U \cup V$ dont les restrictions à U et V sont nulles est nulle.

Par exemple, l’espace des fonctions continues sur les ouverts d’un espace topologique est un faisceau.

La cohomologie classique s’interprète dans ce cadre, en prenant des fonctions localement constantes : si on recouvre un cercle par deux demi-cercles un peu élargis, si on définit une fonction localement constante sur l’intersection des deux parties (qui n’est pas connexe), elle pourra prendre deux valeurs, et il sera impossible de l’étendre en une fonction localement constante sur tout le cercle (i.e. une constante).

Ceci motive la définition de la cohomologie de Čech à valeurs dans un faisceau. Soit X un espace topologique. Soit $U = (U_1, U_2, \dots)$ un recouvrement ouvert de X . Soit \mathcal{F} un faisceau sur X . On définit les cochaînes de degré k à valeurs dans \mathcal{F} comme les applications qui à chaque k -uplet d’ouverts du recouvrement, associent une section sur leur intersection :

$$C^k(U, \mathcal{F}) = \prod_{i_1, \dots, i_k} \mathcal{F}(U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_k})$$

On veut dire qu'une cochaîne est fermée si elle coïncide avec elle-même sur les intersections de $k + 1$ ouverts. On définit donc l'opérateur bord $\partial\sigma \in C^{k+1}(U, \mathcal{F})$ pour $\sigma \in C^k(U, \mathcal{F})$ par :

$$\partial\sigma(U_{i_0}, \dots, U_{i_k}) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \sigma(U_{i_0}, \dots, \widehat{U}_{i_j}, \dots, U_{i_k})|_{U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}}$$

où \widehat{U}_{i_j} signifie qu'on retire U_{i_j} de la liste et où $\sigma|_V$ indique la restriction à V .

Ensuite, on dit qu'une cochaîne est fermée si son bord est nul, que c'est un cobord si c'est le bord d'une autre cochaîne, et on définit :

$$H^k(U, \mathcal{F}) = \frac{\text{Ker } \partial : C^k(U, \mathcal{F}) \rightarrow C^{k+1}(U, \mathcal{F})}{\text{Im } \partial : C^{k-1}(U, \mathcal{F}) \rightarrow C^k(U, \mathcal{F})}$$

comme à l'accoutumée.

Tout ceci dépend de notre choix de recouvrement. On a évidemment une application naturelle de la cohomologie sur un recouvrement vers la cohomologie sur un recouvrement plus fin. Ceci permet de définir rondement la cohomologie de Čech de l'espace X comme la limite inductive, sur tous les recouvrements, de la cohomologie ci-dessus. En fait, un théorème de Leray affirme que lorsqu'on a pris un recouvrement dont tous les éléments, ainsi que toutes leurs intersections finies, sont contractiles, alors la limite est déjà atteinte, ce qui facilite grandement les calculs.

La cohomologie à valeurs dans le faisceau des fonctions localement constantes se confond avec la cohomologie ordinaire (voir l'exemple du cercle ci-dessus).

La cohomologie d'un faisceau admettant des partitions de l'unité (comme le faisceau des fonctions continues sur un espace régulier) sera nulle en degré strictement positif.

La cohomologie des faisceaux contient autant d'information sur le faisceau que sur l'espace sous-jacent. Si par exemple, sur une variété, on prend comme section sur un ouvert les formes différentielles sur cet ouvert, on peut démontrer le théorème de De Rham qui indique que la cohomologie de De Rham est isomorphe à la cohomologie ordinaire, en combinant astucieusement ce qu'on met dans le faisceau et le degré de la cohomologie que l'on prend.

La cohomologie des faisceaux est extrêmement utile tant en géométrie algébrique qu'en géométrie complexe. Elle est entre autres un outil puissant d'étude des fibrés, formalisant par exemple l'intuition qu'un fibré en droites ne peut pas faire grand-chose d'autre que de tourner sur lui-même quand on parcourt une boucle non triviale de l'espace de base. Elle peut aussi servir à définir diverses classes caractéristiques.

Cohomologie des groupes (exposés de Gaëtan Chenevier et Jérôme Plût). L'idée de base est de construire un complexe $X(G)$ à partir d'un groupe G de la façon suivante : les k -cellules du complexe seront simplement les k -uplets d'éléments du groupe, l'opérateur bord étant définie de la manière naturelle. Ceci n'apporte guère d'information sur le groupe, aussi introduit-on une contrainte supplémentaire : on va regarder des cochaînes, et on va imposer qu'une cochaîne soit invariante par l'action de G sur $X(G)$ par translation (et on introduit un léger décalage des indices afin de rester cohérent). On définit donc

$$C^k(G, \mathbb{R}) = \left\{ f : G^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}, \forall g \in G, f(g_0, \dots, g_k) = f(g \cdot g_0, \dots, g \cdot g_k) \right\}$$

et l'opérateur bord pour $f \in C^k(G, \mathbb{R})$:

$$(\partial f)(g_0, \dots, g_{k+1}) = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i f(g_0, \dots, \widehat{g}_i, \dots, g_{k+1})$$

(On peut remplacer \mathbb{R} par n'importe quel groupe commutatif.)

La cohomologie du groupe G à valeurs dans \mathbb{R} est reliée à une cohomologie ordinaire : si X est un espace topologique contractile, que G agit sur X librement par homéomorphismes, et que le quotient $X \rightarrow X/G$ est un revêtement, alors $H^n(G, \mathbb{R}) \sim H^n(X/G, \mathbb{R})$ où le membre de droite est la cohomologie ordinaire. L'espace X/G est appelé un classifiant de G ; on peut montrer qu'il en existe toujours, et qu'il est à peu près unique.

On peut généraliser encore un peu en prenant un G -module V (par exemple, une représentation de G) comme espace des coefficients, et en définissant

$$C^k(G, V) = \left\{ f : G^{k+1} \rightarrow V, \forall g \in G, g.f(g_0, \dots, g_k) = f(g.g_0, \dots, g.g_k) \right\}$$

Cette définition est utile pour l'étude géométrique des groupes infinis, cf. ci-dessous. Elle a en outre des applications en théorie des groupes finis, pour la classification des extensions, et en théorie des nombres (exposé de Gaëtan Chenevier).

Foncteurs dérivés (second exposé de Joël Riou). Un formalisme général permet de réinterpréter les deux théories cohomologiques précédentes (faisceaux, groupes). En effet, la plupart des cohomologies tiennent leur origine de la non-exactitude de certains foncteurs entre catégories abéliennes. Les foncteurs dérivés permettent de mesurer précisément le défaut d'exactitude à droite (puisque nous faisons de la cohomologie) des foncteurs additifs entre catégories abéliennes.

Par exemple, le point de vue grothendieckien sur la cohomologie des faisceaux consiste à remarquer que le foncteur qui à un faisceau de groupes abéliens associe le groupe de ses sections globales est exact à gauche, mais pas exact à droite : une section d'un faisceau quotient se relève localement, mais tout le problème consiste à savoir s'il existe un relèvement *global*. De même, la cohomologie des groupes s'obtient en dérivant le foncteur qui à un G -module associe le groupe des G -invariants.

En première approche, on peut illustrer de nombreuses questions d'algèbre homologique en étudiant les catégories de modules sur un anneau et l'exactitude (ou non) de certains foncteurs classiques : produit tensoriel, homomorphismes. Plus généralement, le point de vue naturel serait celui des catégories dérivées (que nous n'aborderons pas) qui ont la vertu de rendre vraies les formules notoirement fausses (par exemple, si X, Y sont deux variétés compactes, la formule fautive $H^n(X \times Y; \mathbb{Z}) = \bigoplus_{p+q=n} \text{Hom}(H_p(X; \mathbb{Z}) \otimes H_q(Y; \mathbb{Z}))$ se réécrit sous la forme plus juste et plus compacte $\mathbf{R}\Gamma(X \times Y; \mathbb{Z}) = \mathbf{R}\Gamma(X; \mathbb{Z}) \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathbf{R}\Gamma(Y; \mathbb{Z})$, ce qui est la bonne formulation de la formule de Künneth) !

Propriété (T) de Kazhdan et cohomologie des groupes (exposé de François Alter). Les trente dernières années ont vu le développement de l'étude des groupes infinis (les groupes

finis étant bien balisés) d'un point de vue géométrique. Diverses propriétés ont été définies : moyennabilité, hyperbolicité, propriété (T) de Kazhdan... Cette dernière est intimement reliée à la cohomologie des groupes.

Parmi les innombrables définitions de la propriété (T) , donnons celle-ci. Soit G un groupe (localement compact, à base dénombrable). Soit π une représentation unitaire de G dans un espace de Hilbert H (i.e. un morphisme de G dans le groupe des transformations linéaires unitaires de H). On dit que π a un vecteur invariant s'il existe un $x \in H$ fixé par tous les éléments de G . On dit que π a des vecteurs presque invariants si pour tout compact $K \subset G$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $x \in H$ tel que les éléments de K déplacent x de moins de ε : $\forall g \in K, |\pi(g).x - x| < \varepsilon$.

Maintenant, on dit que G est un groupe de Kazhdan (ou qu'il a la propriété (T)) si toute représentation unitaire de G ayant des vecteurs presque invariants a un vecteur invariant.

Cette propriété est stable par morphisme continu (pour l'adhérence de l'image), par quotient (continu). Elle est vraie dans les groupes compacts.

Par (contre-)exemple, \mathbb{R} n'a pas la propriété (T) : si on prend \mathbb{R} agissant sur $L^2(\mathbb{R})$ par translations, une fonction constante sur un long intervalle est un vecteur presque invariant ; et pourtant il n'y a pas de vecteurs invariants.

À l'inverse, il est souvent difficile de montrer que des groupes ont la propriété (T) (il faut considérer toutes les représentations...). Ceci bien qu'en un certain sens, un groupe infini ait la propriété (T) avec une grande probabilité. Signalons quand même que $SL_n(\mathbb{R})$ la possède pour tout $n \geq 3$.

Les groupes de Kazhdan sont très loin d'être commutatifs : un groupe de Kazhdan commutatif est compact ; l'abélianisé $G/[\overline{G}, \overline{G}]$ d'un groupe de Kazhdan est compact.

La propriété (T) est fortement reliée à la cohomologie : un théorème non trivial dit qu'un groupe G est de Kazhdan si et seulement si pour toute représentation unitaire π de G , le premier groupe de cohomologie à valeurs dans π défini ci-dessus, $H^1(G, \pi)$, est nul.

Autres cohomologies. Des généralisations voient constamment le jour : cohomologie bornée des groupes ou des variétés (invention de Gromov qui consiste à prendre des chaînes réelles bornées, ce qui permet de mettre des normes sur les groupes de cohomologie ; elle est reliée à des invariants riemanniens des variétés, ou à des propriétés des groupes telles que l'hyperbolicité ou la moyennabilité), cohomologies L^p pour différents p ... Ou encore celles dont je ne connais que le nom : cohomologies équivariante, motivique, ℓ -adique, rigide, cristalline, étale...

(Co)homologie singulière

Joël Riou

Il s'agit ici de rappeler la construction et les propriétés de la cohomologie singulière, et d'en donner quelques applications. En particulier, on démontrera des théorèmes de modèles acycliques (la théorie homologique construite avec des simplexes ou avec des cubes sera la même), ainsi que les théorèmes liés aux structures multiplicatives. On termine par quelques exemples.

AVERTISSEMENT – *Cet exposé est plus difficile d'accès que les autres exposés du groupe de travail ; il nécessite une certaine habitude de l'algèbre homologique. Son but est de donner des démonstrations "de haut" des théorèmes de l'homologie singulière.*

1 Rappels d'algèbre homologique

Le but de cette partie est de rappeler ce que sont les complexes, les homotopies, tout en supposant bien connues les notions de *catégorie*, *foncteur*.

1.1 Catégories, foncteurs, transformations naturelles

Comme cette notion sera cruciale pour la compréhension d'une partie importante de ce qui va suivre, il est indispensable de rappeler ce qu'est une transformation naturelle.

DÉFINITION 1 (TRANSFORMATION NATURELLE) – *Soient $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ deux foncteurs covariants. On appelle transformation naturelle de F vers G , la donnée η (notée $\eta : F \rightsquigarrow G$) pour tout objet X de \mathcal{C} d'un morphisme $\eta(X) \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), G(X))$, telle que le diagramme suivant soit commutatif pour tout morphisme $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$:*

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\eta(X)} & G(X) \\ \downarrow F(f) & & \downarrow G(f) \\ F(Y) & \xrightarrow{\eta(Y)} & G(Y) \end{array}$$

On peut bien entendu définir cette notion de transformation naturelle pour des foncteurs contravariants, ou des bifoncteurs. De façon générale, on appellera naturelle toute donnée compatible avec les morphismes, c'est-à-dire rendant commutatifs de tels diagrammes.

1.2 Modules différentiels gradués

Dans toute la suite, A désignera un anneau commutatif unitaire. Les définitions en les constructions qui vont suivre s'appliquent à la catégorie des A -modules, mais bien entendu, presque tout ceci pourrait se faire dans n'importe quelle catégorie abélienne (comme la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur un espace topologique, ou plus généralement la catégorie des \mathcal{O}_X -modules sur un espace annelé (X, \mathcal{O}_X)).

On appelle A -module gradué un A -module M muni d'une décomposition en somme directe de A -modules $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$. Si M et N sont deux modules gradués, on appelle morphisme gradué de degré $k \in \mathbb{Z}$ de M vers N tout morphisme de A -modules de M vers N tel que l'image de M_n soit incluse dans N_{n+k} pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On appelle A -module différentiel gradué (ou complexe de chaînes) un A -module gradué M muni d'un endomorphisme gradué de degré -1 noté ∂ tel que $\partial^2 = 0$. L'opérateur ∂ est appelé opérateur bord.

On peut visualiser plus concrètement un module différentiel gradué comme étant un diagramme de la forme suivante tel que la composition de deux opérateurs ∂ successifs soit nulle :

$$\cdots \xleftarrow{\partial} M_0 \xleftarrow{\partial} M_1 \xleftarrow{\partial} \cdots \xleftarrow{\partial} M_{i-1} \xleftarrow{\partial} M_i \xleftarrow{\partial} M_{i+1} \xleftarrow{\partial} \cdots$$

Si M et N sont deux complexes, on appelle morphisme de complexes un morphisme de A -modules gradués de M vers N de degré 0 qui commute à l'opérateur bord, ce qui signifie exactement que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \xleftarrow{\partial} & M_0 & \xleftarrow{\partial} & M_1 & \xleftarrow{\partial} & \cdots & \xleftarrow{\partial} & M_{i-1} & \xleftarrow{\partial} & M_i & \xleftarrow{\partial} & M_{i+1} & \xleftarrow{\partial} & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \xleftarrow{\partial} & N_0 & \xleftarrow{\partial} & N_1 & \xleftarrow{\partial} & \cdots & \xleftarrow{\partial} & N_{i-1} & \xleftarrow{\partial} & N_i & \xleftarrow{\partial} & N_{i+1} & \xleftarrow{\partial} & \cdots \end{array}$$

Cette définition fait des A -modules différentiels gradués une catégorie abélienne.

Par la suite, on aura parfois besoin d'inclure la catégorie des A -modules dans la catégorie des A -modules (éventuellement différentiels) gradués, en faisant correspondre à un A -module M le A -module gradué dont la composante de degré 0 est M , dont les composantes de degré $q \neq 0$ sont nulles, et dont l'opérateur bord est nul.

DÉFINITION 2 – Si M et N sont des A -modules gradués, on munit $M \otimes N$ d'une structure de A -module gradué en convenant que la composante de degré n de $M \otimes N$ est $\bigoplus_{p+q=n} M_p \otimes N_q$.

Si, de plus, M et N sont des A -modules différentiels gradués, on munit $M \otimes N$ de l'opérateur de bord défini par : pour tout $x \in M_p$, $y \in N_q$, $\partial(x \otimes y) = \partial x \otimes y + (-1)^p x \otimes \partial y$.

EXERCICE – Si M, N, W sont des A -modules gradués, on appelle application bilinéaire graduée de $M \times N$ dans W toute application A -bilinéaire $f : M \times N \rightarrow W$ telle que pour tous $p, q \in \mathbb{Z}$, $f(M_p \times N_q) \subset W_{p+q}$.

Vérifier que si M, N sont des A -modules gradués, $M \otimes N$ (muni de l'application bilinéaire graduée $M \times N \rightarrow M \otimes N$) satisfait la propriété universelle suivante : pour tout A -module gradué W , pour toute application A -bilinéaire graduée $f : M \times N \rightarrow W$, il existe un unique

morphisme gradué $\tilde{f} : M \otimes N \longrightarrow W$ telle que f soit la composée de \tilde{f} et de l'application bilinéaire $M \times N \longrightarrow M \otimes N$.

1.3 Foncteur H_*

On rappelle qu'un diagramme est exact si, dès lors que l'on a une partie de diagramme qui ait la forme $E \longrightarrow F \longrightarrow G$, le noyau de la flèche $F \longrightarrow G$ est égal à l'image de la flèche $E \longrightarrow F$.

Maintenant, l'objet des études (co)homologiques est d'étudier le défaut d'exactitude de certains foncteurs. Pour cela, on va construire un foncteur covariant H_* de la catégorie des A -complexes de chaînes dans la catégorie des A -modules gradués (dont les flèches sont ici les morphismes de degré 0).

Soit C_* un A -complexe. Pour tout $q \in \mathbb{Z}$, on note $Z_q(C_*)$ le noyau du morphisme $C_{q-1} \xleftarrow{\partial} C_q$ et $B_q(C_*)$ l'image du morphisme $C_q \xleftarrow{\partial} C_{q+1}$. On appelle les éléments de B_q les bords, et les éléments de Z_q les cycles. Comme $\partial\partial = 0$, les bords sont des cycles, on peut donc considérer le quotient

$$\forall q \in \mathbb{Z} \quad H_q(C_*) = \frac{Z_q(C_*)}{B_q(C_*)}$$

On note alors $H_*(C_*)$ le A -module gradué ainsi obtenu, et on l'appelle homologie du complexe C_* . Maintenant, pour faire de H_* un foncteur, il faut donner l'action d'un morphisme de A -complexes sur l'homologie de ces complexes. Soient C_* et C'_* deux A -complexes, et $f : C_* \longrightarrow C'_*$ un morphisme de complexes. Soit $q \in \mathbb{Z}$, considérons le diagramme suivant qui est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xleftarrow{\partial} & C_{q-1} & \xleftarrow{\partial} & C_q & \xleftarrow{\partial} & C_{q+1} & \xleftarrow{\partial} & \cdots \\ & & \downarrow f & & \downarrow f & & \downarrow f & & \\ \cdots & \xleftarrow{\partial} & C'_{q-1} & \xleftarrow{\partial} & C'_q & \xleftarrow{\partial} & C'_{q+1} & \xleftarrow{\partial} & \cdots \end{array}$$

On peut considérer la restriction du morphisme $C_q \xrightarrow{f} C'_q$ à $Z_q(C_*)$. Du fait que le diagramme précédent est commutatif, l'image de ce morphisme est incluse dans $Z_q(C'_*)$ i.e. l'image d'un cycle est un cycle, on obtient ainsi un morphisme $Z_q \longrightarrow Z'_q$. Il est tout aussi immédiat que l'image d'un bord est un bord, ainsi on peut passer au quotient à droite par B'_q et à gauche par B_q , ce qui donne un morphisme $H_q(C_*) \longrightarrow H_q(C'_*)$.

Ainsi, on a défini un morphisme de A -modules gradués de degré 0 que l'on note $H_*(f) : H_*(C_*) \longrightarrow H_*(C'_*)$. On note aussi f_* ce morphisme $H_*(f)$. Il est immédiat de vérifier que si $f \in \text{Hom}(C_*, C'_*)$ et $g \in \text{Hom}(C'_*, C''_*)$ alors $g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$, et que $1_* = 1$.

Finalement, on a construit le foncteur homologie H_* de la catégorie des A -complexes de chaînes vers la catégorie des A -modules gradués.

EXERCICE –

- Montrer que le foncteur H_* commute aux sommes directes, aux produits.

– Montrer que le foncteur H_* commute aux limites inductives filtrantes.

1.4 Passage terminologique

On a considéré pour le moment des opérateurs ∂ qui descendaient les degrés. Il est à noter que, au lieu de considérer la catégorie des A -complexes de chaînes, nous eussions pu considérer la catégorie des A -complexes de cochaînes, c'est-à-dire que dans ce cas ∂ eut été un endomorphisme gradué de degré $+1$, etc... Nous aurions alors introduit un foncteur covariant H^* (appelé cohomologie) rigoureusement de la même façon, et cela provient en fait de l'équivalence de catégorie entre les A -complexes de chaînes et les A -complexes de cochaînes qui a un A -complexe C_* de chaînes dont la composante en degré q est C_q associe le complexe de cochaînes C^* dont la composante en degré q sera $C^q = C_{-q}$... Ainsi, à tout théorème algébrique sur les complexes de chaînes correspondra un théorème sur les complexes de cochaînes.

Une façon d'éviter les confusions dans ce domaine est de convenir de noter en indice ce qui concerne les complexes de chaînes et en exposant ce qui concerne les complexes de cochaînes.

De plus, si C_* est un A -complexe de chaînes et G un A -module, on peut construire un complexe de cochaîne $\text{Hom}_A(C_*, G)$ en disant que sa composante de degré q est $\text{Hom}_A(C_q, G)$, et que l'opérateur de cobord est le transposé de l'opérateur de bord. On a ainsi un foncteur $\text{Hom}_A(-, G)$ de la catégorie des A -complexes de chaînes vers la catégorie des A -complexes de cochaînes.

1.5 Homotopies

Soient C_* et C'_* deux A -complexes de chaînes. Soit k un morphisme gradué de degré $+1$ de C_* vers C'_* . Alors, $\varphi = \partial k + k\partial$ est un morphisme de complexes de C_* vers C'_* vu que $\varphi\partial = \partial\varphi = \partial k\partial$.

On appelle homotopie tout morphisme de complexes de la forme $\partial k + k\partial$ où k est un morphisme gradué de degré $+1$ pour les complexes de chaînes et -1 pour les complexes de cochaînes. On remarque d'abord qu'une homotopie s'envoie sur une homotopie par les foncteurs $\text{Hom}_A(-, G)$ et $- \otimes -$ (en fait, par n'importe quel foncteur additif), ce qui sera d'un grand intérêt par la suite. De plus, comme une homotopie envoie un (co)cycle sur un (co)bord, les homotopies induisent des morphismes nuls en (co)homologie.

Ainsi, il est intéressant de considérer la catégorie des A -complexes de (co)chaînes comme la catégorie quotient obtenue en identifiant deux morphismes de complexes différant d'une homotopie. Dans la suite, on s'efforcera de préciser dans quel sens on utilisera cette notion qui jouera un grand rôle. Dans cette catégorie des A -complexes modulo homotopies, compte tenu de ce qui précède, $- \otimes -$ et $\text{Hom}_A(-, G)$ restent des foncteurs, et les foncteurs $H_*(-)$ et $H^*(-)$ y gardent tout leur sens.

1.6 Suite exacte longue de cohomologie associée à une suite exacte courte de complexes de cochaînes

On va à présent construire un foncteur de la catégorie des suites exactes courtes de A -complexes de cochaînes vers la catégorie des suites exactes *longues* de A -modules (i.e. les

A -complexes de cochaînes de cohomologie nulle).

Soit donc une suite exacte courte de complexes de cochaînes

$$0 \longrightarrow E^* \xrightarrow{i} F^* \xrightarrow{p} G^* \longrightarrow 0$$

Pour tout $q \in \mathbb{Z}$, grâce aux foncteurs H^q , on obtient des flèches

$$H^q(E^*) \xrightarrow{i^*} H^q(F^*) \xrightarrow{p^*} H^q(G^*)$$

Pour pouvoir mettre bout-à-bout ces morceaux, on va construire un morphisme δ gradué de degré $+1$ de $H^*(G^*)$ vers $H^*(E^*)$. Pour visualiser cela, considérons le diagramme suivant qui est commutatif et dont les lignes sont exactes (les flèches horizontales proviennent de i et p tandis que les flèches verticales sont les opérateurs de cobord) :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & E^{q+2} & \longrightarrow & F^{q+2} & \longrightarrow & G^{q+2} & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & E^{q+1} & \longrightarrow & F^{q+1} & \longrightarrow & G^{q+1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & E^q & \longrightarrow & F^q & \longrightarrow & G^q & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & E^{q-1} & \longrightarrow & F^{q-1} & \longrightarrow & G^{q-1} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Nous sommes en mesure de définir la flèche désirée $\delta : H^q(G^*) \longrightarrow H^{q+1}(E^*)$. Soit donc $x \in G^q$ un cocycle. On peut choisir un élément $y \in F^q$ tel que $x = py$. $p\partial y = \partial py = \partial x = 0$, donc, $\partial y \in E^{q+1}$. Comme $\partial\partial y = 0 \in F^{q+2}$, ∂y est un cocycle dans E^{q+1} , donc a une classe $\delta(x)$ dans $H^{q+1}(E^*)$. Comme y est déterminé modulo un élément de E^q , il est évident que $\delta(x)$ est indépendant du choix de y . Il est aussi aisé de voir que si x est un cobord, alors $\delta(x) = 0$, on en déduit un morphisme de A -modules $\delta : H^q(G^*) \longrightarrow H^{q+1}(E^*)$.

Il s'ensuit le diagramme suivant :

$$\dots \xrightarrow{p^*} H^{q-1}(G^*) \xrightarrow{\delta} H^q(E^*) \xrightarrow{i^*} H^q(F^*) \xrightarrow{p^*} H^q(G^*) \xrightarrow{\delta} H^{q+1}(E^*) \xrightarrow{i^*} \dots$$

EXERCICE – Établir l'exactitude de cette suite de A -modules.

EXERCICE – Montrer que le lemme du serpent est un cas particulier de cette suite exacte longue.

De plus, cette suite exacte est fonctorielle puisque si l'on a un morphisme de suites exactes courtes de A -complexes de cochaînes, on obtient canoniquement grâce au foncteur H^* un morphisme de suites exactes longues.

Voici un morphisme de suites exactes de A -complexes de cochaînes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & E^* & \xrightarrow{i} & F^* & \xrightarrow{p} & G^* & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow e & & \downarrow f & & \downarrow g & & \\
0 & \longrightarrow & E'^* & \xrightarrow{i'} & F'^* & \xrightarrow{p'} & G'^* & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Voici le morphisme de suites exactes longues de cohomologie associée à ce morphisme de suites exactes de A -complexes de cochaînes :

$$\begin{array}{cccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & H^{q-1}(G^*) & \xrightarrow{\delta} & H^q(E^*) & \xrightarrow{i^*} & H^q(F^*) & \xrightarrow{p^*} & H^q(G^*) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(E^*) & \xrightarrow{i^*} & \cdots \\
& & \downarrow g^* & & \downarrow e^* & & \downarrow f^* & & \downarrow g^* & & \downarrow e^* & & \\
\cdots & \longrightarrow & H^{q-1}(G'^*) & \xrightarrow{\delta} & H^q(E'^*) & \xrightarrow{i'^*} & H^q(F'^*) & \xrightarrow{p'^*} & H^q(G'^*) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(E'^*) & \xrightarrow{i'^*} & \cdots
\end{array}$$

2 Compléments d'algèbre homologique

2.1 Théorème des modèles acycliques

Une catégorie avec modèles est une catégorie \mathcal{C} munie d'un ensemble d'objets \mathfrak{M} que l'on appelle modèles.

Soit un foncteur covariant $F : \mathcal{C} \rightarrow A\text{-mod}$. Une base pour F est la donnée d'une famille $(f_j \in F(M_j))_{j \in J}$ avec $M_j \in \mathfrak{M}$ telle que pour tout $X \in \mathcal{C}$, la famille

$$\bigsqcup_{j \in J} \{F(f)(f_j), f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M_j, X)\}$$

soit une base du A -module $F(X)$. On appelle foncteur libre un foncteur qui possède une base.

Formellement, un foncteur libre est un foncteur isomorphe au composé d'un foncteur qui à X associe l'ensemble des fonctions qui à un élément j de J associe un élément de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M_j, X)$ et du foncteur qui à un ensemble associe le A -module libre correspondant.

Si F est un foncteur de \mathcal{C} dans la catégorie des A -modules différentiels gradués, F est libre si et seulement si F_q est un foncteur libre pour tout $q \in \mathbb{Z}$.

On dit qu'un foncteur F d'une catégorie \mathcal{C} avec modèles \mathfrak{M} dans la catégorie des A -modules différentiels gradués est acyclique en degré > 0 si et seulement si

$$\forall M \in \mathfrak{M} \quad \forall q > 0 \quad H_q(F(M)) = 0$$

THÉORÈME 1 (THÉORÈME DES MODÈLES ACYCLIQUES) – Soit \mathcal{C} une catégorie avec modèles \mathfrak{M} , F et F' deux foncteurs de \mathcal{C} dans la catégorie des A -modules différentiels gradués par \mathbb{N} . On suppose que F est libre et que F' est acyclique en degré > 0 , alors

- Toute transformation naturelle $H_0(F) \rightsquigarrow H_0(F')$ provient d'une transformation naturelle $F \rightsquigarrow F'$.
- Deux transformations naturelles $F \rightsquigarrow F'$ induisant la même transformation naturelle $H_0(F) \rightsquigarrow H_0(F')$ diffèrent d'une homotopie naturelle.

DÉMONSTRATION –

- Soit φ une transformation naturelle $H_0(F) \rightsquigarrow H_0(F')$. Il s'agit de définir pour tout objet $X \in \mathcal{C}$ un morphisme $\eta(X) : F(X) \longrightarrow F'(X)$. Soit $(f_j \in F(M_j))_{j \in J_q}$ une base du foncteur F_q . Pour construire une transformation naturelle, il suffit, pour tout $q \in \mathbb{N}$, de définir les éléments $(\eta_q(M_j)(f_j) \in F'_q(M_j))_{j \in J_q}$. En effet, la naturalité de η impose que pour tout $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M_j, X)$, on ait $\eta_q(X)(F_q(f)(f_j)) = F'_q(f)(\eta_q(M_j)(f_j))$, ce qui définit bien $\eta(X)$ sur une base de $F(X)$.

Il résulte immédiatement de ces conditions que pour tout $q \in \mathbb{N}$, η_q est une transformation naturelle $F_q \rightsquigarrow F'_q$, à savoir que le diagramme suivant est commutatif pour tout $q \in \mathbb{N}$, $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$:

$$\begin{array}{ccc} F_q(X) & \xrightarrow{F_q(f)} & F_q(Y) \\ \downarrow \eta(X) & & \downarrow \eta(Y) \\ F'_q(X) & \xrightarrow{F'_q(f)} & F'_q(Y) \end{array}$$

En effet, il suffit pour cela de considérer l'image dans ce diagramme des éléments de la base canonique de $F_q(X)$.

Supposons que la condition suivante de commutation à l'opérateur bord soit vérifiée pour tout $q \in \mathbb{N}$ et $j \in J_q$:

$$\eta_{q-1}(M_j)(\partial f_j) = \partial \eta_q(M_j)(f_j)$$

Comme pour la naturalité de F_q , cette condition suffit pour garantir que η fait correspondre à tout objet X de \mathcal{C} un morphisme de modules différentiels gradués de $F(X)$ vers $F'(X)$. Ajoutée à la naturalité des transformation $F_q \rightsquigarrow F'_q$ pour tout $q \in \mathbb{N}$, cette condition permet de garantir que η est en fait une transformation naturelle $F \rightsquigarrow F'$.

Construisons maintenant par étapes cette transformation naturelle η . Pour tout $j \in J_0$, on peut choisir un élément $\eta_0(M_j)(f_j) \in F'_0(M_j)$ qui rende le diagramme suivant commutatif sur l'élément f_j :

$$\begin{array}{ccc} F_0(M_j) & \longrightarrow & H_0(F(M_j)) \\ \downarrow \eta_0(M_j) & & \downarrow \varphi(M_j) \\ F'_0(M_j) & \longrightarrow & H_0(F'(M_j)) \end{array}$$

Ainsi, on a défini une transformation naturelle $\eta_0 : F_0 \rightsquigarrow F'_0$.

Pour tout $j \in J_1$, la classe de ∂f_j est nulle dans $H_0(F(M_j))$, donc $\varphi(M_j)(\partial f_j) = 0$, ainsi $\eta_0(M_j)(\partial f_j)$ est un bord, ainsi il existe un élément noté $\eta_1(M_j)(f_j) \in F'_1(M_j)$ tel que $\partial \eta_1(M_j)(f_j) = \eta_0(M_j)(\partial f_j)$. Ainsi, on a défini une transformation naturelle $\eta_1 : F_1 \rightsquigarrow F'_1$ telle que $\partial \eta_1 = \eta_0 \partial$.

Supposons maintenant que des transformations naturelles η_i soient définies pour les degrés $i < q$ pour $q > 1$, qui vérifient la condition de commutation à l'opérateur de bord. Définissons une transformation naturelle η_q . Soit $j \in J_q$, le diagramme suivant est com-

mutatif :

$$\begin{array}{ccccc} F_{q-2}(M_j) & \xleftarrow{\partial} & F_{q-1}(M_j) & \xleftarrow{\partial} & F_q(M_j) \\ \downarrow \eta_{q-2}(M_j) & & \downarrow \eta_{q-1}(M_j) & & \\ F'_{q-2}(M_j) & \xleftarrow{\partial} & F'_{q-1}(M_j) & \xleftarrow{\partial} & F'_q(M_j) \end{array}$$

On déduit de ce diagramme que $\eta_{q-1}(M_j)(\partial f_j)$ est un cycle, or $H_{q-1}(F'(M_j)) = 0$, donc il s'agit d'un bord de sorte qu'il existe un élément $\eta_q(M_j)(f_j) \in F'_q(M_j)$ tel que $\eta_{q-1}(M_j)(\partial f_j) = \partial \eta_q(M_j)(f_j)$.

On a donc construit une transformation naturelle $\eta : F \rightsquigarrow F'$. De plus, la définition de η_0 permet, grâce à la technique utilisée à de nombreuses reprises ici, d'assurer que le diagramme suivant est commutatif pour tout objet X :

$$\begin{array}{ccccc} H_0(F(X)) & \longleftarrow & F_0(X) & \xleftarrow{\partial} & F_1(X) \\ \downarrow \varphi(X) & & \downarrow \eta_0(X) & & \downarrow \eta_1(X) \\ H_0(F'(X)) & \longleftarrow & F'_0(X) & \xleftarrow{\partial} & F_1(X) \end{array}$$

Ainsi, la transformation naturelle $\varphi : H_0(F) \rightsquigarrow H_0(F')$ est bien celle induite par la transformation naturelle $\eta : F \rightsquigarrow F'$.

- On procède de façon similaire pour définir une homotopie naturelle entre deux transformations naturelles induisant la même transformation naturelle sur le H_0 . Pour plus de détails, se référer à [Spa].

□

Pour pouvoir tirer parti au maximum de la méthode des modèles acycliques pour l'appliquer à la théorie singulière, on va avoir besoin d'une notion supplémentaire ainsi que d'une version améliorée de ce théorème.

DÉFINITION 3 (AUGMENTATION) – Soit \mathcal{C} une catégorie avec modèles \mathfrak{M} . Soit F un foncteur de \mathcal{C} vers la catégorie des A -modules différentiels gradués par \mathbb{N} . On appelle *augmentation du foncteur F* une transformation naturelle $\varepsilon : F \rightsquigarrow A$ (A désigne le foncteur constant qui à un objet de \mathcal{C} associe le A -module gradué A et à tout morphisme l'identité de A), telle que pour tout modèle $M \in \mathfrak{M}$, ε induise un isomorphisme $H_0(F(M)) \xrightarrow[\simeq]{\varepsilon} H_0(A) \simeq A$.

Si F et F' sont deux foncteurs munis d'une augmentation ε , et η une transformation naturelle $F \rightsquigarrow F'$. On dit que η *préserve l'augmentation* si et seulement si pour tout objet X de \mathcal{C} , le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F_0(X) & \xrightarrow{\eta(X)} & F'_0(X) \\ \downarrow \varepsilon & & \downarrow \varepsilon \\ A & \xlongequal{\quad} & A \end{array}$$

DÉFINITION 4 (FONCTEUR ACYCLIQUE) – Soit \mathcal{C} une catégorie avec modèles \mathfrak{M} . Soit F un foncteur de \mathcal{C} vers la catégorie des A -modules différentiels gradués par \mathbb{N} muni d'une augmentation ε . On dit que F est acyclique s'il est de plus acyclique en degré > 0 .

Pour résumer :

– Pour tout objet X , le diagramme suivant est un A -complexe (i.e. $\varepsilon\partial = 0$) :

$$0 \longleftarrow A \xleftarrow{\varepsilon} F_0(X) \xleftarrow{\partial} F_1(X) \xleftarrow{\partial} F_2(X) \xleftarrow{\partial} F_3(X) \xleftarrow{\partial} \dots$$

Pour tout modèle $M \in \mathfrak{M}$, le A -complexe ci-dessus est une suite exacte. (On dit aussi que ce complexe est acyclique).

– Pour tout morphisme $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F_0(X) & \xrightarrow{F_0(f)} & F_0(Y) \\ \downarrow \varepsilon & & \downarrow \varepsilon \\ A & \xlongequal{\quad} & A \end{array}$$

L'intérêt d'introduire cette notion d'augmentation réside essentiellement dans le théorème suivant :

THÉORÈME 2 (THÉORÈME DES MODÈLES ACYCLIQUES) – Soit \mathcal{C} une catégorie avec modèles \mathfrak{M} . Soient F et F' deux foncteurs covariants de \mathcal{C} vers la catégorie des A -modules différentiels gradués, F et F' étant munis d'une augmentation. On suppose que F est libre et F' acyclique.

Alors, modulo une homotopie naturelle, il existe une unique transformation naturelle $F \rightsquigarrow F'$ préservant l'augmentation.

LEMME 1 – Soit \mathcal{C} une catégorie avec modèles \mathfrak{M} . Soient F et F' deux foncteurs covariants de \mathcal{C} vers la catégorie des A -modules différentiels gradués, F et F' étant munis d'une augmentation. On suppose que F est libre et F' acyclique.

Alors, il existe une unique transformation naturelle $H_0(F) \rightsquigarrow H_0(F')$ commutant à l'augmentation.

DÉMONSTRATION DU LEMME – Il suffit d'établir l'existence et l'unicité d'une transformation naturelle $\eta : F_0 \rightsquigarrow H_0(F')$ commutant à l'augmentation. Soit $(f_j \in F(M_j))_{j \in J_0}$ une base du foncteur F_0 . Comme on l'a vu dans la démonstration du théorème 1, pour définir la transformation naturelle η , il suffit de définir $(\eta(M_j)(f_j) \in H_0(F'(M_j)))_{j \in J_0}$. Or pour tout $j \in J_0$, pour préserver l'augmentation, il existe un unique élément $\eta(M_j)(f_j)$ qui puisse rendre le diagramme suivant commutatif sur l'élément f_j :

$$\begin{array}{ccc} F_0(M_j) & \xrightarrow{\eta(M_j)} & H_0(F'(M_j)) \\ \downarrow \varepsilon & & \simeq \downarrow \varepsilon \\ A & \xlongequal{\quad} & A \end{array}$$

Ensuite, on sait que la naturalité de η et ε assure que η commute à l'augmentation pour tout objet X de \mathcal{C} . \square

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME – C'est une conséquence immédiate du lemme précédent et du théorème 1 \square

THÉORÈME 3 (THÉORÈME DES MODÈLES ACYCLIQUES) – Soit \mathcal{C} une catégories avec modèles \mathfrak{M} . Soient F et F' deux foncteurs covariants de \mathcal{C} vers la catégorie des A -modules différentiels gradués, F et F' étant munis d'une augmentation. On suppose que F et F' sont libres et acycliques.

Alors, modulo une homotopie naturelle, il existe une unique transformation naturelle $F \rightsquigarrow F'$ préservant l'augmentation et c'est une équivalence.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME – En utilisant le théorème 2, si on s'intéresse aux transformations naturelles préservant l'augmentation modulo homotopies naturelles, on sait qu'il en existe d'uniques $F \rightsquigarrow F'$, $F' \rightsquigarrow F$, $1_F : F \rightsquigarrow F$, et $1_{F'} : F' \rightsquigarrow F'$, d'où le résultat. \square

3 Homologie et cohomologie singulière

Nous allons construire l'homologie et la cohomologie singulière qui forment une théorie sur la catégorie des paires d'espaces topologiques. Ce sera la théorie de base à laquelle on s'efforcera de comparer les autres théories que nous considérerons par la suite. En effet, il s'agit d'une théorie très générale puisque l'on peut se fixer un anneau commutatif unitaire A quelconque et appliquer cette théorie à un espace topologique quelconque.

3.1 Construction

On note \mathbf{Top}_2 la catégorie des paires d'espaces topologiques c'est-à-dire les couples (A, B) où A est un espace topologique et B une partie de A . On appelle B la partie relative. Un morphisme entre deux paires d'espaces topologiques est une application continue qui envoie la partie relative sur la partie relative. On notera que le foncteur $\mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Top}_2$ qui à un espace topologique X associe la paire (X, \emptyset) est l'inclusion de la catégorie \mathbf{Top} dans \mathbf{Top}_2 comme sous-catégorie pleine.

Dans cette partie, on considère que pour tout $q \in \mathbb{N}$, les espaces vectoriels \mathbb{R}^{q+1} sont inclus dans $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ (muni du produit scalaire habituel) par le morphisme $(x_0, \dots, x_q) \rightarrow (x_0, \dots, x_q, 0, \dots)$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on peut noter p_i le point de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ dont les coordonnées sont $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ avec $x_j = 0$ si j est différent de i et $x_i = 1$.

Pour tout $q \in \mathbb{N}$, on note Δ_q le simplexe de dimension q c'est-à-dire l'espace topologique correspondant à l'enveloppe convexe dans \mathbb{R}^{q+1} des $q + 1$ points (p_0, \dots, p_q) .

Comme un simplexe de dimension q a $q + 1$ faces, on peut définir différentes inclusions $\Delta_{q-1} \rightarrow \Delta_q$. Ainsi, soit $q \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq i \leq q$, on note $e_q^i \in \mathbf{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta_{q-1}, \Delta_q)$ l'application continue induite par une application affine qui envoie (p_0, \dots, p_{q-1}) sur $(p_0, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_q)$ ($\hat{}$ signifie que ce terme est omis.).

On munit la catégorie des espaces topologiques de l'ensemble de modèles $\{\Delta_q\}_{q \in \mathbb{N}}$. Pour tout $q \in \mathbb{N}$, on note C_q le foncteur $\mathbf{Top} \rightarrow A\text{-mod}$ dont une base est un singleton J tel que le

modèle associé au seul élément de J soit Δ_q , ce qui signifie que pour tout espace topologique X , une base du A -module $C_q(X)$ est constituée de l'ensemble $\text{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta_q, X)$ (les éléments de cet ensemble sont appelés simplexes de dimension q).

Si σ est un simplexe de dimension $q \in \mathbb{N}^*$, et $0 \leq i \leq q$, on note $\sigma^{(i)}$ le simplexe de dimension $q-1$ défini par $\sigma^{(i)} = \sigma \circ e_q^i$, c'est la i -ième face du simplexe σ . Nous sommes maintenant en mesure de définir l'opérateur de bord.

DÉFINITION 5 – Soit X un espace topologique. Pour $q \leq 0$, l'opérateur $\partial : C_q(X) \rightarrow C_{q-1}(X)$ est nul. Pour tout $q \geq 1$ et tout simplexe σ de dimension q , on pose :

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma^{(i)}$$

- Cette définition fait de $C_*(X) = \bigoplus_{q \in \mathbb{N}} C_q(X)$ un complexe de chaînes de A -modules.
- Les foncteurs $(C_q)_{q \in \mathbb{N}}$ donnent un foncteur C_* de la catégorie \mathbf{Top} vers la catégorie des complexes de chaînes de A -modules.

DÉMONSTRATION –

- Il s'agit de prouver que $\partial\partial = 0$. Soit donc un simplexe σ de dimension $q \geq 2$:

$$\begin{aligned} \partial\partial\sigma &= \sum_{j=0}^{q-1} \sum_{i=0}^q (-1)^{i+j} (\sigma^{(i)})^{(j)} \\ &= \sum_{0 \leq j < i \leq q} (-1)^{i+j} (\sigma^{(i)})^{(j)} + \sum_{0 \leq i \leq j \leq q-1} (-1)^{i+j} (\sigma^{(i)})^{(j)} \\ &= \sum_{0 \leq i < j \leq q} (-1)^{i+j} (\sigma^{(j)})^{(i)} - \sum_{0 \leq i < j \leq q} (-1)^{i+j} (\sigma^{(i)})^{(j-1)} \\ &= \sum_{0 \leq i < j \leq q} (-1)^{i+j} \left[(\sigma^{(j)})^{(i)} - (\sigma^{(i)})^{(j-1)} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

En effet, cette dernière égalité résulte du fait que $e_q^j \circ e_{q-1}^i = e_q^i \circ e_{q-1}^{j-1}$ si $q \geq 2$ et $0 \leq i < j \leq q$.

- Pour démontrer la dernière assertion, il reste à vérifier que pour toute fonction continue $f : X \rightarrow Y$, les morphismes $C_q(f)$ donnent un morphisme de A -modules $C_*(f) : C_*(X) \rightarrow C_*(Y)$ qui commute à l'opérateur ∂ , ce qui fait de $C_*(f)$ un morphisme de A -complexes. Pour cela, il suffit de remarquer que si σ est un simplexe de X , alors $(f \circ \sigma)^{(i)} = f \circ \sigma^{(i)}$.

□

Maintenant, si (A, B) est une paire d'espaces topologiques, on remarque que l'inclusion de B dans A induit une flèche $C_*(B) \rightarrow C_*(A)$ qui est une inclusion, on note ainsi $C_*(A, B)$ le quotient $\frac{C_*(A)}{C_*(B)}$.

On obtient ainsi un foncteur covariant C_\star de la catégorie \mathbf{Top}_2 vers la catégorie des complexes de chaînes de A -modules.

Dans la catégorie des espaces topologiques, on note ε la transformation naturelle du foncteur C_\star vers le foncteur constant A dans la catégorie des A -complexes définie par $\varepsilon(\sigma) = 1 \in A$ pour tout simplexe σ de dimension 0. Ainsi, pour tout espace topologique X , ε est un morphisme de $C_0(X)$ vers A qui est nul sur les bords, et naturel dans la mesure où le diagramme suivant est commutatif pour toute application continue $f \in \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$:

$$\begin{array}{ccc} C_\star(X) & \xrightarrow{f_\star} & C_\star(Y) \\ & \searrow \varepsilon & \downarrow \varepsilon \\ & & A \end{array}$$

DÉFINITION 6 – On note $H_\star(-; A)$ ou $H_\star(-)$ le foncteur covariant homologie du foncteur C_\star . H_\star est donc un foncteur de la catégorie \mathbf{Top}_2 vers la catégorie des A -modules gradués. Soit G un A -module, on note $H^\star(-; G)$ le foncteur contravariant $H^\star(\text{Hom}_A(C_\star(-), G))$ de la catégorie \mathbf{Top}_2 vers la catégorie des A -modules gradués.

On appelle $H_\star(-; A)$ le foncteur homologie singulière à coefficients dans A et $H^\star(-; G)$ le foncteur cohomologie singulière à coefficients dans G .

Avant de d'établir les propriétés principales de ces foncteurs, voici quelques lemmes qui nous serviront à les démontrer.

3.2 Lemmes (techniques) concernant le foncteur C_\star

LEMME 2 – Soit X un espace topologique, et $(X_i)_{i \in I}$ ses composantes connexes par arcs. Alors $C_\star(X) \simeq \bigoplus_{i \in I} C_\star(X_i)$.

$H_0(X)$ est canoniquement isomorphe au module libre engendré par les composantes connexes par arcs de X .

DÉMONSTRATION DU LEMME – Le premier résultat est évident dans la mesure où tout simplexe de X se trouve dans une composante connexe par arcs de X puisque les espaces Δ_q sont connexes par arcs.

Pour établir le deuxième résultat, d'après ce qui précède, on peut supposer que X est connexe par arcs (non vide). Soient donc deux points (i.e. simplexes de dimension 0) x et y de X . Il existe un chemin σ qui relie x à y . Ainsi, $\partial\sigma = y - x$. Ainsi, deux points de X ont la même image dans $H_0(X)$. On en déduit la suite exacte suivante :

$$C_1(X) \xrightarrow{\partial} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

Et ceci signifie précisément, que ε induit un isomorphisme $H_0(X) \simeq A$. \square

LEMME 3 – Soit X une partie convexe non vide dans un espace euclidien. Alors $\varepsilon : C_\star(X) \longrightarrow A$ est un isomorphisme dans la catégorie des A -complexes modulo homotopies.

DÉMONSTRATION DU LEMME – On peut supposer que X contient l'origine. On définit un morphisme τ de A -complexes de A vers $C_\star(X)$ qui à $1 \in A$ associe le simplexe constant $\Delta_0 \longrightarrow \{0\} \longrightarrow X \in C_0(X)$. Ainsi $\varepsilon \circ \tau = 1_A$. Soit σ un simplexe de dimension q de X . On note $D(\sigma)$ le $(q+1)$ -simplexe de X défini par l'équation suivante pour tout $t \in [0, 1]$ et $z \in \Delta_q$.

$$D(\sigma)(tp_0 + (1-t)e_{q+1}^0(z)) = (1-t)\sigma(z)$$

D est donc un endomorphisme du module gradué $C_\star(X)$ de degré $+1$.

On remarque que pour $q > 0$, $(D(\sigma))^{(0)} = \sigma$ et que pour $0 \leq i \leq q$, $(D(\sigma))^{(i+1)} = D(\sigma^{(i)})$. Si $q = 0$, $(D(\sigma))^{(0)} = \sigma$ et $(D(\sigma))^{(1)} = \tau(1)$. On en déduit :

$$\partial D + D\partial = 1_{C_\star(X)} - \tau \circ \varepsilon$$

Ainsi modulo homotopies, $\tau \circ \varepsilon \simeq 1_{C_\star(X)}$, d'où le résultat. \square

THÉORÈME 4 – Soit X un espace topologique. Soit \mathcal{U} un ensemble de parties de X telles que les intérieurs des éléments de \mathcal{U} recouvrent X . Notons $C_\star(\mathcal{U})$ le sous- A -complexe de $C_\star(X)$ engendré par les $C_\star(Y) \subset C_\star(X)$ où $Y \in \mathcal{U}$. Alors, l'inclusion $C_\star(\mathcal{U}) \longrightarrow C_\star(X)$ est une équivalence modulo homotopies.

L'idée de cette démonstration va être de partir de simplexes de X , puis de les découper en petits morceaux, et obtenir des simplexes qui, au bout de quelques itérations, seront dans $C_\star(\mathcal{U})$. Avant d'établir ce théorème assez technique mais néanmoins très important, nous allons avoir besoin de quelques résultats préliminaires.

Dans la catégorie **Top**, nous allons commencer par définir une transformation naturelle $sd : C_\star(-) \rightsquigarrow C_\star(-)$ et un morphisme de degré $+1$ naturel $D : C_\star(-) \rightsquigarrow C_\star(-)$, de sorte que pour tout espace topologique X , on ait l'égalité $\partial D + D\partial = 1_{C_\star(X)} - sd$. Comme pour la méthode des modèles acycliques, il suffit de définir ces transformations sur les simplexes ξ_q (identité de Δ_q), et vérifier l'égalité liant D et sd sur ces simplexes "universels" (la naturalité faisant le reste...).

Si (x_0, \dots, x_q) est un $(q+1)$ -uplet dans Δ_n , on note (x_0, \dots, x_q) le simplexe $\sigma : \Delta_q \longrightarrow \Delta_n$ correspondant à une application affine envoyant les sommets de Δ_q (p_0, \dots, p_q) sur (x_0, \dots, x_q) . Ainsi $\xi_q = (p_0, \dots, p_q)$. On note $C_\star^l(\Delta_q)$ le sous-complexe de $C_\star(\Delta_q)$ engendré par ces simplexes affines (ceci a un sens car le bord d'un simplexe affine est une combinaison linéaire de simplexes affines).

Pour tout $q \in \mathbb{N}$, on note $b_q \in \Delta_q$ le barycentre des points (p_0, \dots, p_q) . On définit de plus un morphisme de degré $+1$ $\beta_q : C_\star^l(\Delta_q) \longrightarrow C_\star^l(\Delta_q)$ par la formule suivante pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $(n+1)$ -uplet (x_0, \dots, x_n) dans Δ_q :

$$\beta_q(x_0, \dots, x_n) = (b_q, x_0, \dots, x_n)$$

Notons $\tau : A \longrightarrow C_\star^l(\Delta_q)$ le morphisme défini par $\tau(1) = (b_q)$, on remarque que $\partial\beta_q + \beta_q\partial = 1_{C_\star^l(\Delta_n)} - \tau \circ \varepsilon$

On construit ainsi sd et D par récurrence sur $q \in \mathbb{N}$ en les définissant sur les simplexes universels ξ_q :

- Pour $q = 0$, on pose $sd(\xi_0) = \xi_0$ et $D(\xi_0) = 0$. (Ainsi sd préserve l'augmentation de $C_\star(-)$).
- Ensuite, pour $q \geq 1$, on utilise les formules suivantes :

$$\begin{cases} sd(\xi_q) &= \beta_q(sd(\partial\xi_q)) \\ D(\xi_q) &= \beta_q(sd(\xi_q) - \xi_q - D\partial\xi_q) \end{cases}$$

Pour simplifier la suite des calculs, commençons par vérifier que sd commute à l'opérateur ∂ , par récurrence sur q . En degré 0, c'est évident. Ensuite, pour $q \geq 1$, $\partial sd(\xi_q) = \partial\beta_q(sd(\partial\xi_q)) = sd(\partial\xi_q) - \beta_q\partial(sd(\partial\xi_q))$. Par hypothèse de récurrence, en degré $\leq q-1$, sd commute à l'opérateur bord, ainsi $\partial(sd(\partial\xi_q)) = sd(\partial\partial\xi_q) = 0$, d'où le résultat : $sd\partial = \partial sd$.

Montrons par récurrence sur q que $D\partial + \partial D = sd - 1_{C_\star(X)}$. Pour ξ_0 , c'est évident. Ensuite, pour $q \geq 1$.

$$\partial D\xi_q = \partial\beta_q(sd(\xi_q) - \xi_q - D\partial\xi_q) = sd(\xi_q) - \xi_q - D\partial\xi_q - R \quad \text{avec } R = \beta_q(\partial sd(\xi_q) - \partial\xi_q - \partial D\partial\xi_q)$$

Il reste à prouver que $R = 0$. Par hypothèse de récurrence, $\partial D(\partial\xi_q) + D\partial\partial\xi_q = sd(\partial\xi_q) - \partial\xi_q$, ainsi $R = \beta_q(\partial sd(\xi_q) - \partial\xi_q + \partial\xi_q - sd(\partial\xi_q)) = 0$ car sd commute à ∂ , d'où le résultat.

Soit $x = \sum_{i \in I} \alpha_i \sigma_i \in C_q(\Delta_n)$ avec $\alpha_i \neq 0$. On note $mesh(x)$ la borne supérieure du diamètre de $\sigma_i(\Delta_n)$ pour $i \in I$.

LEMME 4 - Pour tout $x \in C_q^l(\Delta_n)$, on a $mesh(sd(x)) \leq \frac{q}{q+1} mesh(x)$.

EXERCICE - Établir ce lemme par récurrence sur $q \in \mathbb{N}$.

EXERCICE - Sous les hypothèses du théorème 4, pour tout simplexe σ de X , il existe un entier $m_0 \in \mathbb{N}$, tel que $sd^m \sigma \in C_\star(\mathcal{U})$ pour tout $m \geq m_0$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME - Pour tout simplexe σ de X , on note $m(\sigma)$ le plus petit entier tel que $sd^{m(\sigma)} \sigma \in C_\star(\mathcal{U})$. On définit un endomorphisme D' de degré 1 de $C_\star(X)$ par

$$D'(\sigma) = \sum_{j=0}^{m(\sigma)-1} Dsd^j(\sigma)$$

EXERCICE - Vérifier que l'image de $\tau = 1_{C_\star(X)} + \partial D' + D'\partial$ est incluse dans $C_\star(\mathcal{U})$ et vaut l'identité sur $C_\star(\mathcal{U})$.

$\tau : C_\star(X) \rightarrow C_\star(\mathcal{U})$ est ainsi un morphisme de A -complexes (préservant ε) qui est l'inverse (modulo homotopies) de l'inclusion de $C_\star(\mathcal{U})$ dans $C_\star(X)$. \square

3.3 Propriétés principales des foncteurs C_\star , $H_\star(-; A)$, $H^\star(-; G)$

Nous allons établir successivement des propriétés du foncteur C_\star pour en déduire en conséquence les propriétés fondamentales des foncteurs homologie et cohomologie singulière.

Invariance par homotopie

THÉORÈME 5 – Soit $f, g \in \mathbf{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$ deux morphismes homotopes c'est-à-dire qu'il existe une homotopie $\varphi \in \mathbf{Hom}_{\mathbf{Top}}(X \times [0, 1], Y)$ telle que $\varphi(-, 0) = f$ et $\varphi(-, 1) = g$.

Alors, modulo une homotopie, $C_*(f) \simeq C_*(g)$.

LEMME 5 – Pour tout espace topologique X , on note $h_t \in \mathbf{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, X \times [0, 1])$ les applications continues $h_t(-) = (-, t)$.

Alors, h_0 et h_1 induisent des morphismes naturellement homotopes $C_*(h_0) \simeq C_*(h_1) : C_*(X) \rightarrow C_*(X \times [0, 1])$.

DÉMONSTRATION DU LEMME – C_* et $C_*(- \times [0, 1])$ sont deux foncteurs de la catégorie **Top** vers la catégorie des A -complexes gradués par \mathbb{N} munis d'une augmentation tels que C_* soit libre et que $C_*(- \times [0, 1])$ soit acyclique en degré > 0 d'après le lemme 3.2. De plus, $C_*(h_0)$ et $C_*(h_1)$ sont deux transformations naturelles $C_* \rightsquigarrow C_*(- \times [0, 1])$ qui préservent l'augmentation, donc par le théorème des modèles acycliques 3, ces deux transformations naturelles $C_*(h_0)$ et $C_*(h_1)$ sont *naturellement* homotopes. \square

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME – On note h_0 et h_1 les deux morphismes $X \rightarrow X \times [0, 1]$ précédemment définis. Par définition, $f = \varphi \circ h_0$ et $g = \varphi \circ h_1$. Ainsi, comme C_* est un foncteur, $C_*(f) = C_*(\varphi) \circ C_*(h_0)$ et $C_*(g) = C_*(\varphi) \circ C_*(h_1)$, comme $C_*(h_0) \simeq C_*(h_1)$, on obtient $C_*(f) \simeq C_*(g)$. \square

DÉFINITION 7 – On désigne par **HomTop** la catégorie dont les objets sont les espaces topologiques et les morphismes les applications continues modulo homotopies. **HomTop** est donc une catégorie quotient de **Top**.

On désigne par **HomTop₂** la catégorie quotient de **Top₂** obtenue en identifiant deux morphismes homotopes dans le sens suivant : Soit (X, Y) et (X', Y') deux paires d'espaces topologiques et $f, g \in \mathbf{Hom}_{\mathbf{Top}_2}((X, Y), (X', Y'))$. Une homotopie entre f et g est une application continue h de $X \times [0, 1]$ vers Y telle que pour tout $y \in Y$ et $t \in [0, 1]$, $h(y, t) \in Y'$, et telle que $f = h(-, 0)$ et $g = h(-, 1)$.

Le théorème 5 permet de dire que le foncteur C_* de **Top** vers les A -complexes se factorise en un foncteur de la catégorie **HomTop** vers la catégorie des A -complexes (modulo homotopies).

Le théorème qui suit est aussi une conséquence du lemme 5 et de la définition de C_* sur **Top₂** :

THÉORÈME 6 – Le foncteur C_* de la catégorie **Top₂** vers les complexes de chaînes de A -modules se factorise en un foncteur de la catégorie **HomTop₂** vers la catégorie des complexes de chaînes de A -modules (modulo homotopies).

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME – On procède comme pour le théorème 5. Soit (X, A) une paire d'espaces topologiques. Notons i l'inclusion de A dans X . Le lemme 5 donne l'existence de la donnée pour tout espace topologique X d'un morphisme $D(X)$ gradué de degré $+1$ de $C_*(X)$ vers $C_*(X \times [0, 1])$ telle que $C_*(h_0) - C_*(h_1) = \partial D(X) + D(X) \partial \in \mathbf{Hom}(C_*(X), C_*(X \times [0, 1]))$, et *naturelle* dans le sens où pour tout application continue $f \in \mathbf{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$, le diagramme

suisant est commutatif (ce qui n'est pas évident *a priori*) :

$$\begin{array}{ccc} C_*(X) & \xrightarrow{C_*(f)} & C_*(Y) \\ \downarrow D(X) & & \downarrow D(Y) \\ C_*(X \times [0, 1]) & \xrightarrow{C_*(f \times [0, 1])} & C_*(Y \times [0, 1]) \end{array}$$

Considérons le diagramme suivant qui est commutatif (de chaque côté des flèches verticales) et dont les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C_*(A) & \longrightarrow & C_*(X) & \longrightarrow & C_*(X, A) & \longrightarrow & 0 \\ & & C_*(h_0) \downarrow C_*(h_1) & & C_*(h_0) \downarrow C_*(h_1) & & C_*(h_0) \downarrow C_*(h_1) & & \\ 0 & \longrightarrow & C_*(A \times [0, 1]) & \longrightarrow & C_*(X \times [0, 1]) & \longrightarrow & C_*(X \times [0, 1], A \times [0, 1]) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

La naturalité de D a pour conséquence que, par le morphisme $D(X) : C_*(X) \rightarrow C_*(X \times [0, 1])$, $C_*(A)$ s'envoie dans $C_*(A \times [0, 1])$. Ceci a une grande importance, puisque ainsi $D(X)$ passe au quotient pour donner un morphisme D' de degré $+1$ de $C_*(X, A)$ dans $C_*(X \times [0, 1], A \times [0, 1])$, et il est aisé de voir que dans $\text{Hom}(C_*(X, A), C_*(X \times [0, 1], A \times [0, 1]))$, on a $\partial D' + D' \partial = C_*(h_0) - C_*(h_1)$, d'où le résultat.

□

CONSÉQUENCE – Les foncteurs $H_*(-; A)$ et $H^*(-; G)$ sont des foncteurs homotopiques, c'est-à-dire qu'ils se factorisent dans la catégorie **HomTop**₂.

Triples espaces topologiques

On définit la catégorie **Top**₃ des triples espaces topologiques de façon analogue à celle des triples espaces topologiques. Un objet de **Top**₃ est un triplet (X, Y, Z) où X est un espace topologique et $X \supset Y \supset Z$.

A un triple espace topologique (X, Y, Z) , on peut associer fonctoriellement une suite exacte courte de A -complexes. Pour cela, notons f l'inclusion $(Y, Z) \rightarrow (X, Z)$ et g l'inclusion $(X, Z) \rightarrow (X, Y)$.

$$0 \longrightarrow C_*(Y, Z) \xrightarrow{f_*} C_*(X, Z) \xrightarrow{g_*} C_*(X, Y) \longrightarrow 0$$

L'exactitude de cette suite est évidente. En utilisant le foncteur qui a une suite exacte courte de A -complexes associe une suite exacte longue de (co)homologie, on obtient le résultat suivant :

CONSÉQUENCE –

– On appelle suite exacte longue homologique du triple espace topologique (X, Y, Z) la suite exacte suivante qui est fonctorielle :

$$\cdots \longrightarrow H_{q+1}(X, Y) \longrightarrow H_q(Y, Z) \longrightarrow H_q(X, Z) \longrightarrow H_q(X, Y) \longrightarrow H_{q-1}(Y, Z) \longrightarrow \cdots$$

- On appelle suite exacte longue cohomologique du triple espace topologique (X, Y, Z) la suite exacte suivante qui est fonctorielle :

$$\cdots \rightarrow H^{q-1}(Y, Z; G) \rightarrow H^q(X, Y; G) \rightarrow H^q(X, Z; G) \rightarrow H^q(Y, Z; G) \rightarrow H^{q+1}(X, Y; G) \rightarrow \cdots$$

Quand $Z = \emptyset$, on appelle ces suites exactes les suites exactes longues (co)homologiques de la paire.

DÉMONSTRATION – La suite exacte homologique est une conséquence directe de l’exactitude de la suite de A -complexes précédente. Pour la suite exacte cohomologique, il faut en plus remarquer que, étant donné que la suite exacte de A -complexes précédente se scinde (il s’agit de A -modules libres), quand on applique le foncteur $\text{Hom}_A(-, G)$, on obtient la suite exacte suivante de A -complexes qui donne lieu à la suite exacte de cohomologie :

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(C_*(X, Y), G) \longrightarrow \text{Hom}_A(C_*(X, Z), G) \longrightarrow \text{Hom}_A(C_*(Y, Z), G) \longrightarrow 0$$

□

Suites exactes de Mayer-Viétoris

LEMME 6 – Soit X un espace topologique. Soient A et B deux parties de X telles que la réunion des intérieurs de A et de B soit X . Notons i_1, i_2 les inclusions de $A \cap B$ dans A et dans B , et j_1, j_2 les inclusions de A et de B dans X , et désignons par $C_*(A) + C_*(B)$ le sous- A -module $j_{1*}(C_*(A)) + j_{2*}(C_*(B))$ de $C_*(X)$. Alors, on a le diagramme fonctoriel suivant où la première ligne est exacte et où l’inclusion $C_*(A) + C_*(B) \rightarrow C_*(X)$ est un isomorphisme modulo homotopies.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_*(A \cap B) & \xrightarrow{\begin{bmatrix} i_{1*} \\ i_{2*} \end{bmatrix}} & C_*(A) \oplus C_*(B) & \xrightarrow{j_{1*} - j_{2*}} & C_*(A) + C_*(B) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & \downarrow \simeq & & \\ & & & & & & C_*(X) & & \end{array}$$

DÉMONSTRATION DU LEMME – Il est évident que la première ligne est exacte, et l’isomorphisme modulo homotopies résulte du théorème 4 □

CONSÉQUENCE (SUITES EXACTES DE MAYER-VIÉTORIS) – Sous les hypothèses du lemme, on appelle suite exacte longue de Mayer-Viétoris pour l’homologie singulière la suite exacte suivante qui est fonctorielle :

$$\cdots \longrightarrow H_{q+1}(X) \longrightarrow H_q(A \cap B) \longrightarrow H_q(A) \oplus H_q(B) \longrightarrow H_q(X) \longrightarrow \cdots$$

Sous les mêmes hypothèses, on appelle suite exacte longue de Mayer-Viétoris pour la cohomologie singulière la suite exacte suivante qui est fonctorielle :

$$\cdots \longrightarrow H^{q-1}(A \cap B; G) \longrightarrow H^q(X; G) \longrightarrow H^q(A; G) \oplus H^q(B; G) \longrightarrow H^q(A \cap B; G) \longrightarrow \cdots$$

DÉMONSTRATION – La suite exacte homologique est une conséquence directe du lemme précédent. Pour la suite exacte cohomologique, il faut en plus remarquer que, étant donné que le A -module $C_*(A) + C_*(B)$ est libre, la suite exacte de A -complexes précédente se scinde, donc, quand on applique le foncteur $\text{Hom}_A(-, G)$, on obtient le diagramme suivant de A -complexes dont la première ligne est exacte et le morphisme vertical un isomorphisme modulo homotopies :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_A(C_*(A) + C_*(B), G) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(C_*(A); G) \oplus \text{Hom}_A(C_*(B), G) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(C_*(A \cap B), G) \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow \simeq & & & & \\
 & & \text{Hom}_A(C_*(X), G) & & & &
 \end{array}$$

On en déduit donc, comme d'habitude, une longue suite exacte de cohomologie. \square

Excision

THÉORÈME 7 – Pour toute paire d'espaces topologiques (X, A) , si U est une partie de A tel que l'adhérence de U soit dans l'intérieur de A , alors, si on note j l'inclusion $(X - U, A - U) \subset (X, A)$, il y a des isomorphismes :

$$j_* : H_*(X - U, A - U) \simeq H_*(X, A)$$

$$j^* : H^*(X, A; G) \simeq H^*(X - U, A - U; G)$$

DÉMONSTRATION – Notons $X_1 = X - U$ et $X_2 = A$. Considérons le diagramme suivant qui est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 C_*(X_1)/C_*(X_1 \cap X_2) & \xrightarrow{j} & C_*(X)/C_*(X_2) \\
 \searrow i & & \nearrow i' \\
 & (C_*(X_1) + C_*(X_2))/C_*(X_2) &
 \end{array}$$

Il est évident que i est un isomorphisme, de plus, on déduit du théorème 4 que i' est un isomorphisme modulo homotopies, donc le composé j est lui aussi un isomorphisme modulo homotopies. Ainsi, on a bien un isomorphisme (modulo homotopies) canonique $C_*(X - U, A - U) \longrightarrow C_*(X, A)$, d'où le résultat. \square

Axiome du point

THÉORÈME 8 – Si X est un singleton, alors canoniquement $H^*(X; G) \simeq G$ et $H_*(X; A) \simeq A$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME – D’après le lemme 3.2, le A -complexe $C_*(X)$ est isomorphe (modulo homotopies) à A (via ε). Le résultat découle donc du calcul de l’homologie du A -complexe A et de la cohomologie du A -complexe $\text{Hom}_A(A, G) \simeq G$. \square

EXERCICE – Donner une autre démonstration de ce résultat en considérant directement $C_*(X)$.

Théorie homologique à support compact

THÉORÈME 9 – Pour toute paire d’espaces topologiques (X, A) , on a un isomorphisme $\lim_{\rightarrow} H_*(X', A') \xrightarrow{\simeq} H_*(X, A)$ où (X', A') parcourt les paires (ordonnées par l’inclusion) telles que X' et A' soient des compacts (non nécessairement séparées).

EXERCICE – Le démontrer...

Produits

THÉORÈME 10 (S. EILENBERG - J.A. ZILBER, 1953) – Il existe un isomorphisme fonctoriel (modulo une homotopie naturelle) du foncteur $C_*(-) \otimes C_*(-)$ vers le foncteur $C_*(- \times -)$ de la catégorie $\mathbf{Top} \times \mathbf{Top}$ vers la catégorie des complexes de chaînes de A -module.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME – Pour éviter les confusions, on rappelle qu’un morphisme du double espace $A \times B$ vers le double espace $C \times D$ est la donnée d’un couple dans le produit $\text{Hom}_{\mathbf{Top}}(A, C) \times \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(B, D)$. On munit la catégorie $\mathbf{Top} \times \mathbf{Top}$ des doubles espaces topologiques de l’ensemble de modèles $(\Delta_p \times \Delta_q)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$. Le foncteur $C_*(- \times -)$ est muni de l’augmentation qui provient de l’augmentation ε de $C_*(-)$. Le foncteur $C_*(-) \otimes C_*(-)$ est muni de l’augmentation $\varepsilon \otimes \varepsilon : C_*(-) \otimes C_*(-) \rightsquigarrow A \otimes A \simeq A$.

Il s’agit de montrer que ces deux foncteurs de la catégorie $\mathbf{Top} \times \mathbf{Top}$ sont acycliques et libres.

Soit $\Delta_p \times \Delta_q$ un modèle de $\mathbf{Top} \times \mathbf{Top}$. Comme l’espace topologique $\Delta_p \times \Delta_q$ est convexe (pour le plongement évident dans un espace affine), le lemme 3.2 assure que le complexe $C_*(\Delta_p \times \Delta_q)$ est isomorphe (modulo homotopies) au complexe A . D’après ce même lemme 3.2, on a deux isomorphismes (modulo homotopies) $\varepsilon : C_*(\Delta_p) \rightarrow A$ et $\varepsilon : C_*(\Delta_q) \rightarrow A$ dans la catégorie des A -modules différentiels gradués, on en déduit aisément l’isomorphisme $\varepsilon \otimes \varepsilon : C_*(\Delta_p) \otimes C_*(\Delta_q) \rightarrow A \otimes A \simeq A$. Ainsi, les deux foncteurs $C_*(- \times -)$ et $C_*(-) \otimes C_*(-)$ sont acycliques.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait qu’une base canonique de $C_n(X \times Y)$ est constituée de l’ensemble des éléments de $\text{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta_n, X \times Y)$ c’est-à-dire, par la propriété universelle du produit dans \mathbf{Top} , des éléments de $\text{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta_n, X) \times \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta_n, Y)$, c’est-à-dire, par définition de la

catégorie $\mathbf{Top} \times \mathbf{Top}$, des éléments de $\text{Hom}_{\mathbf{Top} \times \mathbf{Top}}(\Delta_n \times \Delta_n, X \times Y)$. Ainsi, formellement, l'application diagonale $\Delta_n \rightarrow \Delta_n \times \Delta_n$ est une base du foncteur $C_n(- \times -)$. Ainsi, le foncteur $C_\star(- \times -)$ est libre.

Pour tout $d \in \mathbb{N}$, notons ξ_d l'identité de Δ_d , que l'on considère comme un élément de $C_\star(\Delta_d)$. On sait que le foncteur $C_p(-)$ est libre de base ξ_p et que le foncteur $C_q(-)$ est libre de base ξ_q , donc le foncteur $C_n(- \times -) = \bigoplus_{p+q=n} C_p(-) \otimes C_q(-)$ est libre de base $(\xi_p \otimes \xi_q)_{p+q=n}$. Le foncteur $C_\star(-) \otimes C_\star(-)$ est libre.

Le théorème résulte alors du théorème des modèles acycliques 3. \square

Ce théorème permet de construire beaucoup de structures supplémentaires sur les modules d'homologie et de cohomologie singulière.

4 Structures multiplicatives

4.1 Produit croisé d'homologie

THÉORÈME 11 – Si X et Y sont deux espaces topologiques, il existe un morphisme naturel

$$H_\star(X) \otimes H_\star(Y) \xrightarrow{\mu} H_\star(X \times Y)$$

DÉMONSTRATION – Ceci résulte du théorème de Eilenberg-Zilber et du fait que si C_\star et D_\star sont deux complexes, on peut définir un tel morphisme $H_\star(C_\star) \otimes H_\star(D_\star) \rightarrow H_\star(C_\star \otimes D_\star)$ défini ainsi : si $x \in Z_p(C_\star)$ et $y \in Z_q(D_\star)$ alors $\mu([x] \otimes [y]) = [x \otimes y] \in H_{p+q}(C_\star \otimes D_\star)$. \square

4.2 Produit croisé de cohomologie

THÉORÈME 12 – Si X et Y sont deux espaces topologiques, il existe un morphisme naturel

$$H^\star(X; G) \otimes H^\star(Y; G') \xrightarrow{\mu} H^\star(X \times Y; G \otimes G')$$

.

DÉMONSTRATION – Si C_\star et D_\star sont deux complexes, on a naturellement le morphisme suivant de complexes :

$$\text{Hom}_A(C_\star, G) \otimes \text{Hom}_A(D_\star, G') \rightarrow \text{Hom}_A(C_\star \otimes D_\star, G \otimes G')$$

On en déduit un morphisme naturel en cohomologie :

$$H^\star(\text{Hom}_A(C_\star(X), G) \otimes \text{Hom}_A(C_\star(Y), G')) \rightarrow H^\star(C_\star(X) \otimes C_\star(Y), G \otimes G')$$

De plus, en composant ce morphisme naturel avec le morphisme construit dans la construction du produit croisé d'homologie, on obtient le morphisme naturel suivant :

$$H^\star(X; G) \otimes H^\star(Y; G) \rightarrow H^\star(C_\star(X) \otimes C_\star(Y), G \otimes G')$$

Finalement, en composant ce morphisme avec le morphisme naturel issu du théorème de Eilenberg-Zilber, on obtient le morphisme naturel voulu. \square

EXERCICE – Montrer que les produits croisés d'homologie et de cohomologie sont associatifs.

4.3 \cup produit

THÉORÈME 13 – Si X est un espace topologique, il existe un morphisme naturel

$$H^*(X; A) \otimes H^*(X; A) \longrightarrow H^*(X; A)$$

DÉMONSTRATION – L'application diagonale $X \rightarrow X \times X$ induit un morphisme naturel $H^*(X \times X; A) \rightarrow H^*(X; A)$. Il suffit donc de composer le produit croisé de cohomologie avec ce morphisme naturel pour obtenir le \cup produit. \square

DÉFINITION 8 (ALGÈBRES ANTICOMMUTATIVES) –

- Soit B une A -algèbre (associative unitaire) graduée. On dit que B est anticommutative si et seulement si pour tous $x \in B_p$ et $y \in B_q$ alors $xy = (-1)^{pq}yx$.
- Soient B et C deux A -algèbres graduées anticommutatives. On munit le A -module gradué $B \otimes C$ d'une structure d'algèbre anticommutative par $(b_1 \otimes c_1)(b_2 \otimes c_2) = (-1)^{pq}(b_1b_2) \otimes (c_1c_2)$ si c_1 est de degré p et b_2 de degré q .

EXERCICE – Vérifier que dans la catégorie des A -algèbres graduées anticommutatives, le produit tensoriel précédemment défini vérifie la propriété universelle de la somme directe.

EXERCICE – Si X est non vide, le \cup produit fait de $H^*(X; A)$ une A -algèbre graduée anticommutative.

EXERCICE – Vérifier que la naturalité du \cup produit a pour conséquence que si $f \in \text{Hom}_{\text{Top}}(X, Y)$ alors f^* est un morphisme de A -algèbres de $H^*(Y; A)$ vers $H^*(X; A)$.

EXERCICE – Montrer que le morphisme $\mu : H^*(X; A) \otimes H^*(Y; A) \rightarrow H^*(X \times Y; A)$ est un morphisme de A -algèbres.

4.4 \cap produit

THÉORÈME 14 – Soient n et q deux entiers, et X un espace topologique. Il existe un morphisme naturel

$$H^q(X; A) \otimes H_n(X) \longrightarrow H_{n-q}(X)$$

DÉMONSTRATION – Il suffit de construire un morphisme naturel $\eta : \text{Hom}_A(C_*(X), A) \otimes C_*(X) \longrightarrow C_*(X)$.

Si C_* et D_* sont des complexes, il existe un morphisme naturel

$$h : \text{Hom}_A(D_*, A) \otimes (C_* \otimes D_*) \longrightarrow C_*$$

Pour cela, si $f \in \text{Hom}_A(D_*, A)$, $x \in C_*$ et $y \in D_*$, on pose $h(f \otimes (x \otimes y)) = f(y)x$.

Notons $\tau : C_*(X) \longrightarrow C_*(X) \otimes C_*(X)$ le morphisme obtenu à partir de l'application diagonale $X \longrightarrow X \times X$ et de l'isomorphisme (modulo homotopies) du théorème de Eilenberg-Zilber. Si $x \in \text{Hom}_A(C_q(X), A)$ et $y \in C_n(X)$, on pose $\eta(x \otimes y) = h(x \otimes \tau(y))$. \square

EXERCICE – Si $u \in H^p(X; A)$, $v \in H^q(X)$ et $z \in H_n(X)$, alors

$$u \cap (v \cap z) = (u \cup v) \cap z \in H_{n-p-q}(X)$$

On en déduit le théorème suivant :

THÉORÈME 15 – Pour tout espace topologique X , $H_*(X)$ est un module sur $H^*(X; A)$.

5 Calculs

5.1 Introduction des foncteurs $\tilde{C}_*(-)$, $\tilde{H}_*(-)$, et $\tilde{H}^*(-, G)$

Pour faciliter les calculs (prosaïquement pour augmenter le nombre de 0 qui apparaissent dans les suites exactes), on peut introduire des foncteurs très liés à ceux déjà introduits.

Si X est un espace topologique non vide, on note $\tilde{C}_*(X)$ le complexe de A -module noyau du morphisme $\varepsilon : C(X) \longrightarrow A$. Comme X est non vide, on a en fait la suite exacte suivante fonctorielle de complexes (scindée) :

$$0 \longrightarrow \tilde{C}_*(X) \longrightarrow C_*(X) \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

On note ainsi $\tilde{H}_*(-)$ et $\tilde{H}^*(-, G)$ les foncteurs homologie et cohomologie de ce foncteur $\tilde{C}_*(-)$. Ce sont les modules d'homologie et de cohomologie singulière réduits.

Grâce aux longues suites exactes tirées de cette suite exacte de complexes, on obtient des isomorphismes canoniques $\tilde{H}_i(X) \simeq H_i(X)$ et $H^i(X; G) \simeq \tilde{H}^i(X; G)$ pour tout $i \geq 1$. En degré 0, on a les suites exactes fonctorielles suivantes :

$$0 \longrightarrow \tilde{H}_0(X) \longrightarrow H_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow G \xrightarrow{t\varepsilon} H^0(X; G) \longrightarrow \tilde{H}^0(X; G) \longrightarrow 0$$

Il est immédiat que \tilde{C}_* possède aussi la propriété d'invariance par homotopie. Ainsi, par exemple, si X est contractile, $\tilde{H}_*(X) = 0$ et $\tilde{H}^*(X; G) = 0$.

EXERCICE – En faisant attention à ne pas appliquer cette théorie à l'espace vide, démontrer les résultats suivants.

THÉORÈME 16 – Soit (X, A) une paire d'espaces topologiques, avec A non vide. Alors, on a les suites exactes suivantes qui sont fonctorielles :

$$\begin{aligned} \cdots &\longrightarrow H_{q+1}(X, A) \longrightarrow \tilde{H}_q(A) \longrightarrow \tilde{H}_q(X) \longrightarrow H_q(X, A) \longrightarrow \tilde{H}_{q-1}(A) \longrightarrow \cdots \\ \cdots &\longrightarrow \tilde{H}^{q-1}(A) \longrightarrow H^q(X, A) \longrightarrow \tilde{H}^q(X) \longrightarrow \tilde{H}^q(A) \longrightarrow H^{q+1}(X, A) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

THÉORÈME 17 – Soit X un espace topologique, A et B deux parties de X d'intersection non vide telles que la réunion des intérieurs de A et B soit X , alors on appelle suite exacte réduite de Mayer-Viétoris pour l'homologie singulière la suite exacte suivante qui est fonctorielle :

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_{q+1}(X) \longrightarrow \tilde{H}_q(A \cap B) \longrightarrow \tilde{H}_q(A) \oplus \tilde{H}_q(B) \longrightarrow \tilde{H}_q(X) \longrightarrow \tilde{H}_{q-1}(A \cap B) \longrightarrow \cdots$$

Sous les mêmes hypothèses, on appelle suite exacte réduite de Mayer-Viétoris pour la cohomologie singulière la suite exacte suivante qui est fonctorielle :

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}^{q-1}(A \cap B; G) \longrightarrow \tilde{H}^q(X; G) \longrightarrow \tilde{H}^q(A; G) \oplus \tilde{H}^q(B; G) \longrightarrow \tilde{H}^q(A \cap B; G) \longrightarrow \cdots$$

5.2 Exercices

(Co)homologie des sphères

Soit \mathcal{S}^n la sphère de dimension n . On note N son pôle Nord et S son pôle Sud.

EXERCICE – Appliquer la suite exacte de Mayer-Viétoris aux ouverts $\mathcal{S}^n - N$ et $\mathcal{S}^n - S$ pour calculer l'homologie et la cohomologie des sphères par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, en utilisant les foncteurs $\tilde{H}_*(-)$ et $\tilde{H}^*(-; -)$.

EXERCICE – Démontrer que l'application $\begin{cases} \mathcal{S}^n & \longrightarrow \mathcal{S}^n \\ x & \longmapsto -x \end{cases}$ induit l'endomorphisme de multiplication par $(-1)^{n+1}$ sur $H_n(\mathcal{S}^n)$ et sur $H^n(\mathcal{S}^n)$. [Hint : Commencer par calculer l'action d'une matrice orthogonale sur l'homologie de la sphère, en commençant par les réflexions...] En déduire le théorème de la boule chevelue.

THÉORÈME 18 (THÉORÈME DE LA BOULE CHEVELUE) – Si $n \geq 1$, la sphère \mathcal{S}^n possède un champ de vecteurs non nuls si et seulement si n est impair.

(Co)homologie de la bouteille de Klein

On note K la bouteille de Klein.

EXERCICE – *Établir les résultats suivants :*

$$H_i(K; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad H^i(K; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 0 \\ \mathbb{Z} & \text{si } i = 1 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } i = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(Co)homologie des espaces projectifs

EXERCICE – *Calculer l'homologie et la cohomologie des espaces projectifs $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, $\mathbb{P}^n(\mathbb{H})$.*

Bibliographie

Pour cet exposé, on pourra consulter [Spa], [Hil], [Sch].

Le théorème de De Rham et la dualité de Poincaré

Charles-Antoine Louët

Le but de cet exposé est de démontrer deux théorèmes fondamentaux en cohomologie des variétés \mathcal{C}^∞ . Le premier, le théorème de De Rham, nous dit que la cohomologie de De Rham définie par les formes différentielles s'identifie à la cohomologie singulière, définie par les simplexes. La dualité de Poincaré, valable pour les variétés topologiques, mais qui ne sera démontrée que pour les variétés \mathcal{C}^∞ , permet de considérer la cohomologie de De Rham en degré k comme le dual de la cohomologie de De Rham en degré $n - k$, pour toute variété \mathcal{C}^∞ orientable compacte de dimension n .

1 Introduction

1.1 Un peu d'histoire

Henri Poincaré est né à Nancy le 29 avril 1854. Son nom devient connu lorsqu'en 1889 il reçoit le prix Oscar II (roi de Suède et de Norvège) pour "une merveilleuse étude de la stabilité du système solaire". Ses travaux sont en effet consacrés pour la plupart à l'étude des équations différentielles, et aux problèmes de stabilité. Il est notamment conduit à l'étude de certaines équations différentielles de la forme $F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$ où F est un polynôme. On peut voir les solutions à cette équation comme les courbes intégrales d'un champ de vecteurs tangents à S , la surface définie par l'équation $F(x, y, z) = 0$. Poincaré écrit : "*Toutes les voies diverses où je m'étais engagé successivement me conduisaient à l' "Analysis Situs". J'avais besoin des données de cette science pour poursuivre mes études sur les courbes définies par les équations différentielles et pour les étendre aux équations différentielles d'ordre supérieur et en particulier à celles du problème des trois corps*".

En 1895, il publie son article "Analysis Situs", qui sera suivi entre 1899 et 1904 de cinq volumineux compléments. Il introduit des concepts topologiques fondamentaux tels que la notion d'homéomorphisme entre variétés, l'orientation, et l'homologie. Il introduit également pour une variété de dimension n les "nombres de Betti", et expose pour eux un "théorème de dualité". Pour une variété fermée, orientée, de dimension n , $B_p = B_{n-p}$.

1.2 Quelques complexes

On suppose connus les complexes définissant l’homologie singulière et la cohomologie de De Rham (voir l’exposé d’introduction). Il a été démontré dans une session précédente du groupe de travail que pour définir la cohomologie singulière on pouvait utiliser soit les simplexes, soit les cubes, et on utilisera ici plutôt les cubes, simplement parce que c’est plus simple et plus visuel, mais on peut tout aussi bien raconter tout ce qui suit dans le cadre des simplexes. On appelle cocomplexe un complexe ascendant.

Soit X une variété \mathcal{C}^∞ . On note $(C_*(X), \delta)$ le complexe définissant l’homologie singulière, et $(\Omega^*(X), d)$ le cocomplexe définissant la cohomologie de De Rham. On rappelle que la cohomologie singulière à valeurs dans un groupe abélien G est la cohomologie du cocomplexe obtenu à partir de $(C_*(X), \delta)$ en appliquant le foncteur $\text{Hom}(_, G)$. On notera $(C^*(X), d)$ ce cocomplexe dans le cas où $G = \mathbb{Z}$.

Il est possible de définir un autre complexe, qui ressemble beaucoup à $C_*(X)$, mais qui utilise la structure \mathcal{C}^∞ de X . Soit $I = [0; 1]$. On pose $C_n^{\mathcal{L}}(X) = \{T : I^n \rightarrow X ; T \in \mathcal{C}^\infty\}$, où $T \in \mathcal{C}^\infty$ signifie qu’il existe un voisinage de I^n dans \mathbb{R}^n tel que T se prolonge sur ce voisinage en une application \mathcal{C}^∞ . Le complexe lisse est en fait un sous-complexe du complexe habituel (il est stable par δ). On verra que cette inclusion induit un isomorphisme en homologie et en cohomologie, ce qui entraîne en particulier qu’on peut toujours choisir un représentant lisse d’une classe d’homologie.

On a alors les constructions naturelles suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} H^n(X, \mathbb{R}) & \times & H_n(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ f & , & u \mapsto f(u) \end{array} \right. \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} H_{DR}^n(X, \mathbb{R}) & \times & H_n(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ \omega & , & u \mapsto \int_u \omega \end{array} \right.$$

C’est une des façons de comprendre le théorème de De Rham : la cohomologie, qu’elle soit définie par le cocomplexe de De Rham ou par le complexe singulier, peut être vue comme agissant sur l’homologie singulière. L’isomorphisme de De Rham est défini justement pour conserver cette action, il est donc très naturel, et on peut dire que le théorème de De Rham est aussi un théorème de dualité.

La dualité de Poincaré exprime qu’on a pour X orientable une dualité parfaite :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} H_{DRC}^n(X, \mathbb{R}) & \times & H_n(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ \omega & , & \eta \mapsto \int_X \omega \wedge \eta \end{array} \right.$$

1.3 Une technique de démonstration

On va démontrer le théorème de De Rham et la dualité de Poincaré grâce à la proposition suivante :

PROPOSITION 1 – *Soit \mathcal{P} une propriété des variétés (topologiques, respectivement orientées, \mathcal{C}^∞ , de dimension fixée,...). On fait les hypothèses suivantes sur \mathcal{P} :*

- *Si X est un ouvert convexe de \mathbb{R}^n , alors $\mathcal{P}(X)$.*
- *Si X s’écrit comme réunion de deux ouverts \mathcal{U} et \mathcal{V} , alors $\mathcal{P}(\mathcal{U})$, $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ et $\mathcal{P}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$ entraînent $\mathcal{P}(X)$.*

- Si X s'écrit comme réunion d'une famille d'ouverts $(\mathcal{U}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ vérifiant $\forall i \quad \mathcal{U}_i \subset \mathcal{U}_{i+1}$ et $\overline{\mathcal{U}_i}$ compact, alors $\mathcal{P}(\mathcal{U}_i)$ pour tout i entraîne $\mathcal{P}(X)$.
- Si X est la réunion disjointe d'une famille d'ouverts possédant tous la propriété \mathcal{P} , alors X la possède aussi.
- \mathcal{P} est stable par isomorphisme.

Alors, pour toute variété paracompacte (topologique, respectivement orientée, \mathcal{C}^∞ , de dimension fixée,...), $\mathcal{P}(X)$.

DÉMONSTRATION – On commence par démontrer par récurrence sur p que les réunions de p convexes de \mathbb{R}^n jouissent de la propriété \mathcal{P} . Pour $p = 1$ c'est une des hypothèses sur \mathcal{P} . Si on suppose que les réunions de p convexes ont la propriété \mathcal{P} , on en déduit qu'il en est de même pour les réunions de $p + 1$ convexes. En effet, \mathcal{P} est vraie pour la réunion des p premiers, pour le dernier, et pour l'intersection de ces deux ouverts qui est une réunion de p convexes, et le résultat suit de la deuxième hypothèse sur \mathcal{P} .

On peut maintenant s'attaquer aux ouverts de \mathbb{R}^n . Soit \mathcal{O} un tel ouvert. On peut trouver un recouvrement de \mathcal{O} par une famille dénombrable de boules, disons $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Posons maintenant $\mathcal{U}_i = B_0 \cup \dots \cup B_i$. Les \mathcal{U}_i forment un recouvrement de \mathcal{O} possédant les vertus requises pour utiliser la troisième hypothèse sur \mathcal{P} et conclure que $\mathcal{P}(\mathcal{O})$.

Soit maintenant X une variété paracompacte (topologique, respectivement orientée, etc...). Si X est connexe, elle possède une base dénombrable (cf. [Spi] pour un exposé des propriétés topologiques des variétés paracompactes). X est donc réunion d'une famille dénombrable d'ouverts (\mathcal{V}_i) qu'on peut prendre tels que \mathcal{V}_i soit un ouvert homéomorphe (difféomorphe) à un ouvert de \mathbb{R}^n . Comme les ouverts de \mathbb{R}^n possèdent toujours un recouvrement dénombrable par des ouverts d'adhérence compacte, on peut quitte à raffiner le recouvrement de X supposer que les $\overline{\mathcal{V}_i}$ sont compacts. On pose maintenant $\mathcal{U}_i = \mathcal{V}_0 \cup \dots \cup \mathcal{V}_i$. La deuxième hypothèse sur \mathcal{P} permet d'affirmer que les \mathcal{V}_i ont la propriété \mathcal{P} , et on utilise alors la troisième hypothèse pour conclure. Lorsque X n'est plus supposée connexe, on l'écrit comme réunion de ses composantes connexes, et la quatrième hypothèse s'applique. \square

On va utiliser ce théorème pour démontrer trois choses : la dualité de Poincaré, le théorème de De Rham, puis que l'homologie et la cohomologie lisses sont identiques à l'homologie et à la cohomologie usuelles. On vérifiera la première hypothèse à la main (et c'est toujours là qu'on aura le contenu géométrique simple de la preuve, le reste étant purement algébrique), la deuxième découlera de la suite exacte de Mayer-Vietoris, la quatrième et la cinquième seront tellement évidentes qu'on n'aura pas à les vérifier. Pour vérifier la troisième hypothèse, il nous faut des compléments d'algèbre, qu'on développe dans la section suivante.

2 Quelques outils

2.1 L'homologie de la limite et... la limite des homologies

Soit \mathcal{K} la catégorie des complexes de groupes abéliens indexés par \mathbb{Z} . C'est une catégorie dont les objets sont les suites $(K_n, \delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où $\delta_n : K_n \rightarrow K_{n-1}$, avec $\delta_n \delta_{n+1} = 0$. Un morphisme entre K et L consiste en la donnée d'une suite (f_n) d'applications, $f_n : K_n \rightarrow L_n$, telles que le

carré suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longleftarrow & K_n & \xleftarrow{\delta_{n+1}} & K_{n+1} & \longleftarrow & \cdots \\
 & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n+1} & & \\
 \cdots & \longleftarrow & L_n & \xleftarrow{\delta_{n+1}} & L_{n+1} & \longleftarrow & \cdots
 \end{array}$$

Il est possible pour une suite de complexes $(K^{(i)})_{i \in \mathbb{N}^*}$, avec des morphismes de transition $K^{(i)} \rightarrow K^{(i+1)}$, de définir la limite inductive des $K^{(i)}$. C'est le complexe qui en degré n est constitué de la limite inductive (au sens des \mathbb{Z} -modules) des $K_n^{(i)}$. De l'exactitude des limites inductives filtrantes dans la catégorie des \mathbb{Z} -modules on déduit facilement le résultat

$$H_n(\varinjlim_i K^{(i)}) = \varinjlim_i H_n(K^{(i)})$$

Malheureusement, les choses sont moins agréables pour les limites projectives... Une suite $(K^{(i)})_{i \in \mathbb{N}^*}$ étant donnée, avec des morphismes de transition $K^{(i+1)} \rightarrow K^{(i)}$ cette fois, il est toujours aussi facile de construire la limite projective des $K^{(i)}$. On la note $K_n^{(\infty)}$, et son terme de degré n est la limite projective des $K_n^{(i)}$. Comme les limites projectives (même filtrantes) de \mathbb{Z} -modules ne sont pas exactes, mais seulement exactes à gauche, le morphisme naturel $H_n(K^{(\infty)}) \rightarrow \varprojlim_i H_n(K^{(i)})$ sera seulement surjectif dans le cas qui nous intéresse, mais pas injectif. Pour exprimer son noyau, nous aurons besoin de \varprojlim^1 , premier foncteur dérivé de \varprojlim (au sens des \mathbb{Z} -modules). La notion de foncteur dérivé sera introduite ultérieurement dans le groupe de travail et n'aide aucunement à la compréhension de ce qui suit.

2.2 Un peu d'algèbre : la limite projective et son premier foncteur dérivé

Dans toute la suite, tous les systèmes projectifs seront supposés indexés par \mathbb{N}^* . On considère un système projectif de \mathbb{Z} -modules, (M_i) avec morphismes de transition $\varphi_i : M_{i+1} \rightarrow M_i$ (pour lesquels on omet souvent l'indice : $\varphi : M_{i+1} \rightarrow M_i$). On peut définir la limite projective de ce système comme un sous-module du produit direct des M_i , de la façon classique. Cela correspond à considérer le noyau du morphisme

$$d \left\{ \begin{array}{l} \prod_i M_i \quad \longrightarrow \quad \prod_i M_i \\ (x_1, x_2, \dots) \longmapsto (x_1 - \varphi(x_2), x_2 - \varphi(x_3), \dots) \end{array} \right.$$

Par définition, $\varprojlim^1_i (M_i) = \text{coker } d$. On a donc une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \varprojlim_i (M_i) \longrightarrow \prod_i M_i \xrightarrow{d} \prod_i M_i \longrightarrow \varprojlim^1_i (M_i) \longrightarrow 0$$

Un morphisme Ψ entre deux systèmes projectifs (à valeurs dans une catégorie quelconque) (M, φ) et (N, ψ) est la donnée d'une famille (Ψ_i) de morphismes $\Psi_i : M_i \rightarrow N_i$ telle que les carrés

$$\begin{array}{ccc}
 M_i & \xleftarrow{\varphi} & M_{i+1} \\
 \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\
 N_i & \xleftarrow{\psi} & N_{i+1}
 \end{array}$$

soient commutatifs. On alors un morphisme naturel $\varprojlim_i^1(\Psi_i) : \varprojlim_i^1(M_i) \rightarrow \varprojlim_i^1(N_i)$ défini par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \varprojlim_i(M_i) & \longrightarrow & \prod_i M_i & \xrightarrow{d} & \prod_i M_i & \longrightarrow & \varprojlim_i^1(M_i) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \varprojlim_i(\Psi_i) & & \downarrow \prod \Psi_i & & \downarrow \prod \Psi_i & & \downarrow \varprojlim_i^1(\Psi_i) & & \\ 0 & \longrightarrow & \varprojlim_i(N_i) & \longrightarrow & \prod_i N_i & \xrightarrow{d} & \prod_i N_i & \longrightarrow & \varprojlim_i^1(N_i) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Il est laissé en exercice aux lecteurs assidus de montrer que \varprojlim_i^1 est bien un foncteur. Nous sommes maintenant en mesure de combler le défaut d'exactitude de \varprojlim_i . On dit qu'une suite de systèmes projectifs $0 \rightarrow (M'_i) \rightarrow (M_i) \rightarrow (M''_i) \rightarrow 0$ (à valeurs dans une catégorie abélienne quelconque) est exacte si pour tout i , $0 \rightarrow M'_i \rightarrow M_i \rightarrow M''_i \rightarrow 0$ est exacte. On a alors le théorème suivant :

THÉORÈME 1 – Soit $0 \rightarrow (M'_i) \rightarrow (M_i) \rightarrow (M''_i) \rightarrow 0$ une suite exacte de systèmes projectifs de \mathbb{Z} -modules. On a alors une suite exacte (plus) longue :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \varprojlim_i(M'_i) & \longrightarrow & \varprojlim_i(M_i) & \longrightarrow & \varprojlim_i(M''_i) \\ & & & & & \searrow & \\ & & \varprojlim_i^1(M'_i) & \longrightarrow & \varprojlim_i^1(M_i) & \longrightarrow & \varprojlim_i^1(M''_i) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

DÉMONSTRATION – Considérons le cocomplexe K défini par $K_0 = K_1 = \prod M_i$ et $K_n = 0$ pour les autres n . On prend pour opérateur cobord $d : K_0 \rightarrow K_1$. La cohomologie de ce complexe vaut $\varprojlim_i(M_i)$ en degré 0, $\varprojlim_i^1(M_i)$ en degré 1 et 0 partout ailleurs. On définit de même K' et K'' à l'aide de M' et de M'' . On obtient une suite exacte $0 \rightarrow K' \rightarrow K \rightarrow K''$. Sa suite exacte longue de cohomologie donne exactement le résultat voulu. \square

LEMME 1 – Soit (M_i) un système projectif de \mathbb{Z} -modules. Si $M_{i+1} \rightarrow M_i$ est surjectif pour tout i alors $\varprojlim_i^1(M_i) = 0$.

DÉMONSTRATION – Il suffit de se rappeler de la définition $\varprojlim_i^1(M_i) = \text{coker } d$ et de vérifier que d est surjective, ce qui est immédiat. \square

En fait, l'hypothèse faite sur les morphismes de transition est un peu trop forte et on peut améliorer le résultat :

LEMME 2 (MITTAG-LEFFLER) – Soit (M_i) un système projectif de \mathbb{Z} -modules. On suppose que pour tout i , il existe $i_0 \geq i$ tel que $\text{im}(M_j \rightarrow M_i) = \text{im}(M_{i_0} \rightarrow M_i)$ pour tout $j \geq i_0$. Alors $\varprojlim_i^1(M_i) = 0$.

DÉMONSTRATION – Soit $M'_i = \text{im}(M_{i_0} \rightarrow M_i)$. Le morphisme de transition $M_{i+1} \rightarrow M_i$ induit un morphisme $M'_{i+1} \rightarrow M'_i$. En effet, on vérifie que $\text{im}(M'_{i+1} \rightarrow M_i) = M'_i$. On a

alors un nouveau système projectif (M'_i) . Il vérifie les condition du lemme 1, on en déduit que $\varprojlim_i^1(M'_i) = 0$.

On considère maintenant $M''_i = M_i/M'_i$. On a encore un système projectif, défini par les morphismes de transition passés aux quotients. Il vérifie la propriété suivante, qui fait d'ailleurs qu'on dit de lui qu'il est "trivial" : pour tout i , il existe i_0 tel que la flèche $M''_{i_0} \rightarrow M''_i$ soit nulle. Appelons φ les morphismes de transition de M'' . Pour $y = (y_1, y_2, \dots) \in \prod M''_i$, la trivialité de M'' permet de définir $x = (x_1, x_2, \dots) \in \prod M''_i$ par la formule $x_i = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^k y_{k+i}$. On vérifie qu'on a alors $d(x) = y$, ce qui montre que d est une surjection. Il en découle que $\varprojlim_i^1(M''_i) = 0$.

Remarquons pour conclure qu'on a une suite exacte $0 \rightarrow (M'_i) \rightarrow (M_i) \rightarrow (M''_i) \rightarrow 0$ et qu'en vertu du théorème 1 on a $0 \rightarrow \varprojlim_i^1(M_i) \rightarrow 0$. \square

On arrive maintenant au résultat final de cette section, qui nous servira dans la suite.

THÉORÈME 2 – Soit $(K^{(i)})$ un système projectif de complexes de \mathbb{Z} -modules. On suppose que pour tout q , $\varprojlim_i^1 K_q^{(i)} = 0$. On a alors pour tout q une suite exacte naturelle

$$0 \longrightarrow \varprojlim_i^1 H_{q+1}(K^{(i)}) \longrightarrow H_q(K^{(\infty)}) \longrightarrow \varprojlim_i H_q(K^{(i)}) \longrightarrow 0$$

DÉMONSTRATION – Voici à quoi ressemble $(K^{(i)})$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \dots & & \dots \\
 & & & & \swarrow & & \swarrow \\
 & & & & K_{q+1}^{(i)} & \longleftarrow & K_{q+1}^{(i+1)} & \longleftarrow & \dots \\
 & & & & \swarrow & & \swarrow & & \\
 & & & & K_q^{(i)} & \longleftarrow & K_q^{(i+1)} & \longleftarrow & \dots \\
 & & & & \swarrow & & \swarrow & & \\
 & & & & K_{q-1}^{(i)} & \longleftarrow & K_{q-1}^{(i+1)} & \longleftarrow & \dots \\
 & & & & \swarrow & & \swarrow & & \\
 & & & & \dots & & \dots & &
 \end{array}$$

Considérons les suites exactes

$$0 \rightarrow Z_q^{(i)} \rightarrow K_q^{(i)} \rightarrow B_{q-1}^{(i)} \rightarrow 0 \quad (1)$$

$$0 \rightarrow B_q^{(i)} \rightarrow Z_q^{(i)} \rightarrow H_q^{(i)} \rightarrow 0 \quad (2)$$

On peut leur appliquer le foncteur \varprojlim_i , et obtenir les suites du théorème 1. On trouve alors grâce à (1), puis en utilisant (2) :

$$\varprojlim_i^1 B_{q-1}^{(i)} = 0 \quad (3)$$

$$\varprojlim_i^1 Z_q^{(i)} = \varprojlim_i^1 H_q^{(i)} \quad (4)$$

On obtient finalement les suites suivantes à partir de (1) et (2) :

$$0 \rightarrow \varprojlim_i Z_q^{(i)} \rightarrow \varprojlim_i K_q^{(i)} \rightarrow \varprojlim_i B_{q-1}^{(i)} \rightarrow \varprojlim_i^1 Z_q^{(i)} \rightarrow 0 \quad (5)$$

$$0 \rightarrow \varprojlim_i B_q^{(i)} \rightarrow \varprojlim_i Z_q^{(i)} \rightarrow \varprojlim_i H_q^{(i)} \rightarrow 0 \quad (6)$$

On vérifie à la main que

$$Z_q^{(\infty)} = \varprojlim_i Z_q^{(i)} \quad (7)$$

Il y a une petite ambiguïté dans la notation employée ci-dessus : l'égalité ressemble beaucoup à la définition qu'on a donnée de $L^{(\infty)}$ pour un complexe quelconque L . En fait, par $Z_q^{(\infty)}$, il faut entendre en l'occurrence "les cycles de $K^{(\infty)}$ "... Mais ici, on montre qu'on peut se permettre de faire la confusion. C'est dû au fait que lorsqu'on a un morphisme de systèmes projectifs de \mathbb{Z} -modules, les opérations "prendre le noyau" et "prendre la limite projective" commutent. Le défaut de commutation entre "prendre la limite projective d'un complexe" et "prendre son homologie" viendra donc de la différence entre les bords de $K^{(\infty)}$ et $\varprojlim_i B_q^{(i)}$. C'est cette différence qu'on va mesurer maintenant, et afin de bien garder les idées en place, on n'utilisera pas la notation $B_q^{(\infty)}$. On parlera de $B_q(K^{(\infty)})$ pour désigner les bords du complexe à l'infini, c'est-à-dire $\text{im } \delta_{q+1}^{(\infty)}$.

Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & Z_q^{(i)} & \longrightarrow & K_q^{(i)} & \xrightarrow{\delta_q^{(i)}} & K_{q-1}^{(i)} & \longrightarrow & K_{q-1}^{(i)}/B_{q-1}^{(i)} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \searrow f_i & & \nearrow g_i & & & & \\
 & & & & & & B_{q-1}^{(i)} & & & & \\
 & & & & \nearrow & & \searrow & & & & \\
 0 & & & & & & & & & & 0
 \end{array} \quad (8)$$

Il est constitué de trois suites exactes, l'une d'entre elles est (1). On applique le foncteur \varprojlim_i à (8), en se souvenant de (3) et de (5) pour obtenir

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \varprojlim_i Z_q^{(i)} & \longrightarrow & K_q^{(\infty)} & \xrightarrow{\delta_q^{(\infty)}} & K_{q-1}^{(\infty)} & \longrightarrow & \varprojlim_i (K_{q-1}^{(i)}/B_{q-1}^{(i)}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \searrow f_\infty & & \nearrow g_\infty & & & & \\
 & & & & & & \varprojlim_i B_{q-1}^{(i)} & & & & \\
 & & & & \nearrow & & \longrightarrow & & \varprojlim_i^1 Z_q^{(i)} & \longrightarrow & 0 \\
 0 & & & & & & & & & &
 \end{array}$$

autre diagramme de suites exactes. On voit ici que $\text{im } \delta_q^{(\infty)} \subset \text{im } g_\infty$. Le quotient se calcule dans $B_{q-1}^{(i)}$: en effet $\text{im}(\delta_q^{(\infty)})$ est l'image de $\text{im } f_\infty$ par l'injection g_∞ . Par conséquent, le quotient $\text{im } g_\infty / \text{im } \delta_q^{(\infty)}$ n'est autre que le conoyau de f_∞ , soit $\varprojlim_i^1 Z_q^{(i)}$. On a donc démontré

$$B_{q-1}(K^{(\infty)}) \subset \varprojlim_i B_{q-1}^{(i)} \quad (9)$$

et surtout

$$\frac{\varprojlim_i B_{q-1}^{(i)}}{B_{q-1}(K^{(\infty)})} = \varprojlim_i^1 Z_q^{(i)} \quad (10)$$

Maintenant, constatons qu'on a bien sûr $B_{q-1}^{(i)} \subset Z_{q-1}^{(i)}$, et comme la limite projective est exacte à gauche, on trouve que

$$\varprojlim_i B_{q-1}^{(i)} \subset \varprojlim_i Z_{q-1}^{(i)} \quad (11)$$

(9) et (11) nous permettent de parler de la suite exacte

$$0 \longrightarrow \frac{\varprojlim_i B_{q-1}^{(i)}}{B_{q-1}(K^{(\infty)})} \longrightarrow \frac{\varprojlim_i Z_{q-1}^{(i)}}{B_{q-1}(K^{(\infty)})} \longrightarrow \frac{\varprojlim_i Z_{q-1}^{(i)}}{\varprojlim_i B_{q-1}^{(i)}} \longrightarrow 0$$

Mais par (10) puis (4) le premier terme vaut $\varprojlim_i^1 H_q^{(i)}$. (7) nous dit que le deuxième terme est $H_{q-1}(K^\infty)$, alors que le troisième est $\varprojlim_i H_{q-1}^{(i)}$. On a donc bien la suite exacte annoncée. \square

2.3 Un peu de topologie

THÉORÈME 3 – Soit M une variété paracompacte C^∞ et \mathcal{U} et \mathcal{V} deux ouverts de M tels que $M = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$. Alors il existe deux fonctions f et g appartenant à $C^\infty(M, \mathbb{R})$ telles que $f + g = 1$, $f \geq 0$, $g \geq 0$ et telles que le support de f soit inclus dans \mathcal{U} et celui de g dans \mathcal{V} .

DÉMONSTRATION – Le lecteur soucieux de connaître les détails techniques de cette démonstration pourra consulter [DR]. \square

On en déduit le résultat suivant.

THÉORÈME 4 – Soit M une variété C^∞ paracompacte et \mathcal{U} un ouvert de M . Soit $K \subset \mathcal{U}$ une partie compacte. Alors il existe $h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ telle que $0 \leq h \leq 1$, valant 1 sur K et à support inclus dans \mathcal{U} .

DÉMONSTRATION – Il suffit d'appliquer le théorème 3 au recouvrement $M = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ en prenant pour \mathcal{V} le complémentaire de K dans M . On obtient deux fonctions f et g , g valant 0 sur K . Donc f vaut 1 sur K . De plus son support est inclus dans \mathcal{U} . \square

3 Trois démonstrations

3.1 Le théorème de De Rham

Soit X une variété C^∞ quelconque. On définit un morphisme φ entre le cocomplexe de De Rham et le cocomplexe singulier lisse par :

$$\varphi \left\{ \begin{array}{l} \Omega^k(X) \rightarrow \\ v \mapsto \end{array} \right. \varphi(v) \left\{ \begin{array}{l} C_{\mathcal{L}}^k(X, \mathbb{R}) \\ C_k^{\mathcal{L}}L \rightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto \int_u v \end{array} \right.$$

C'est la formule de Stokes qui nous dit que nous avons défini là un morphisme de cocomplexes.

THÉORÈME 5 (DE RHAM) – *Pour toute variété paracompacte C^∞ X , φ induit un isomorphisme (fonctoriel) en cohomologie.*

DÉMONSTRATION – On se sert de la proposition 1 pour obtenir le résultat. On commence donc par supposer que X est un convexe de \mathbb{R}^n .

On sait alors que la cohomologie de De Rham est nulle sauf en degré 0 où elle est de dimension 1, et qu'il en va de même pour la cohomologie singulière (on accepte pour le moment que les cubes lisses et les cubes continus définissent la même homologie et la même cohomologie). Tout se passe donc en degré 0. Mais un cocycle singulier en degré 0, c'est un élément de $\text{Hom}(C_0(X), \mathbb{R})$, qui est nul sur les bords. Comme $C_0(X)$ est le module libre engendré par les points de X , $\text{Hom}(C_0(X), \mathbb{R})$ est exactement égal à \mathbb{R}^X . Soit f un cocycle de degré 0, et soient a et b deux points de X . $b - a$ est le bord du segment $[a, b]$, car X est convexe. On a donc $f(a) - f(b) = 0$ et $f(a) = f(b)$. f provient donc de la fonction qu'elle définit ainsi, qui est une fonction constante et qui est donc bien un cocycle en cohomologie de De Rham puisque sa différentielle est nulle.

On suppose maintenant que X est réunion de deux ouverts \mathcal{U} et \mathcal{V} tels que \mathcal{U} , \mathcal{V} et $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ vérifient le théorème de De Rham. On peut écrire les suites de Mayer-Vietoris en cohomologie de De Rham et en cohomologie singulière. En notant φ^* le morphisme induit en cohomologie par φ , on a pour tout degré q le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccccc} H_{DR}^{q-1}(\mathcal{U}) \oplus H_{DR}^{q-1}(\mathcal{V}) & \longrightarrow & H_{DR}^{q-1}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) & \longrightarrow & H_{DR}^q(X) & \longrightarrow & H_{DR}^q(\mathcal{U}) \oplus H_{DR}^q(\mathcal{V}) & \longrightarrow & H_{DR}^q(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \\ \downarrow \varphi^* & & \downarrow \varphi^* & & \downarrow \varphi^* & & \downarrow \varphi^* & & \downarrow \varphi^* \\ H^{q-1}(\mathcal{U}) \oplus H^{q-1}(\mathcal{V}) & \longrightarrow & H^{q-1}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) & \longrightarrow & H^q(X) & \longrightarrow & H^q(\mathcal{U}) \oplus H^q(\mathcal{V}) & \longrightarrow & H^q(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \end{array}$$

où, bien sûr, les cohomologies singulières sont à coefficients dans \mathbb{R} . Comme le diagramme est commutatif, et qu'on a supposé que les deux flèches des deux extrêmes étaient des isomorphismes, on conclut par le lemme des cinq que la flèche du milieu en est un aussi. Par conséquent, φ induit bien un isomorphisme en cohomologie pour X .

Supposons maintenant que X s'écrive comme réunion d'une famille d'ouverts $(\mathcal{U}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ vérifiant $\forall i \quad \mathcal{U}_i \subset \mathcal{U}_{i+1}$ et $\overline{\mathcal{U}_i}$ compact. Il est assez facile de voir que le cocomplexe de De Rham de X est la limite projective des cocomplexes de De Rham des \mathcal{U}_i . En d'autres termes, on a pour tout degré q : $\Omega^q(X) = \varprojlim_i \Omega^q(\mathcal{U}_i)$. Montrons à l'aide du lemme 2 que $\varprojlim_i \Omega^q(\mathcal{U}_i) = 0$. Soit i un

entier, et i_0 tel que $\mathcal{U}_{i_0} \supset \overline{\mathcal{U}_i}$. L'existence d'un tel i_0 est une conséquence de la compacité de $\overline{\mathcal{U}_i}$. Soit ω une q -forme différentielle sur \mathcal{U}_{i_0} . On peut appliquer le théorème 4, qui nous donne une fonction $h \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{R})$ telle que $h = 1$ sur $K = \overline{\mathcal{U}_i}$, avec le support de h inclus dans $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{i_0}$. La forme $h\omega$ se prolonge (par 0) à n'importe quel ouvert plus grand que \mathcal{U}_{i_0} , et en particulier à \mathcal{U}_j pour $j \geq i_0$. Autrement dit, on a montré que $\text{im}(\Omega^q(\mathcal{U}_j) \rightarrow \Omega^q(\mathcal{U}_i)) = \text{im}(\Omega^q(\mathcal{U}_{i_0}) \rightarrow \Omega^q(\mathcal{U}_i))$ pour tout $j \geq i_0$. On a donc bien que $\varprojlim_i^1 \Omega^q(X) = 0$. On applique alors le théorème 2 pour obtenir une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \varprojlim_i^1 H_{DR}^{q-1}(\mathcal{U}_i) \longrightarrow H_{DR}^q(X) \longrightarrow \varprojlim_i H_{DR}^q(\mathcal{U}_i) \longrightarrow 0$$

On recommence avec la cohomologie singulière : on constate d'abord que le cocomplexe singulier de X est la limite projective des cocomplexes singuliers des \mathcal{U}_i . Cette fois-ci, il est plus facile de montrer que $\varprojlim_i^1 C_{\mathcal{L}}^q(\mathcal{U}_i) = 0$. En effet, $C_{\mathcal{L}}^q(\mathcal{U}_{i+1}) \rightarrow C_{\mathcal{L}}^q(\mathcal{U}_i)$ est une surjection : il suffit pour s'en convaincre de voir que $C_q^{\mathcal{L}}(\mathcal{U}_i)$ est un facteur direct de $C_q^{\mathcal{L}}(\mathcal{U}_{i+1})$. On applique alors le lemme 1, puis le théorème 2. On obtient alors une suite exacte analogue à la précédente, et en appliquant φ^* , on obtient le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \varprojlim_i^1 H_{DR}^{q-1}(\mathcal{U}_i) & \longrightarrow & H_{DR}^q(X) & \longrightarrow & \varprojlim_i H_{DR}^q(\mathcal{U}_i) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \varphi^* & & \downarrow \varphi^* & & \downarrow \varphi^* & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \varprojlim_i^1 H^{q-1}(\mathcal{U}_i) & \longrightarrow & H^q(X) & \longrightarrow & \varprojlim_i H^q(\mathcal{U}_i) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Et encore une fois avec le lemme des cinq, on a l'isomorphisme voulu.

Maintenant, il est clair que la propriété "vérifier le théorème de De Rham" est stable par isomorphisme, et qu'en outre si elle est vérifiée par chacun des ouverts d'une réunion disjointe d'ouverts, alors elle est vraie pour leur réunion.

D'après la proposition 1, on a terminé. \square

3.2 La dualité de Poincaré

Nous allons maintenant démontrer la dualité de Poincaré, en utilisant exactement la même méthode. On suppose connues les définitions de la cohomologie de De Rham à support compact. Elles figurent dans tous les livres de géométrie différentielle élémentaire, dans les cours de maîtrise sur ce sujet, et ont été précédemment évoquées dans le groupe de travail.

Soit X une variété \mathcal{C}^∞ orientable de dimension n quelconque. On définit le cocomplexe Θ^* en appliquant le foncteur $\text{Hom}(_, \mathbb{R})$ au complexe $D_\star = \Omega_C^{n-\star}(X)$. On a donc $\Theta^k(X) = \text{Hom}(\Omega_C^{n-k}, \mathbb{R})$.

EXERCICE – En utilisant le fait que \mathbb{R} est un corps, démontrer que la cohomologie de Θ en degré k est le dual de la cohomologie de De Rham à support compact en degré $n - k$ de X .

Dans toute cette partie, H désignera toujours la cohomologie de De Rham.

On définit maintenant un morphisme φ

$$\varphi \left\{ \begin{array}{l} \Omega^k(X) \rightarrow \\ v \mapsto \varphi(v) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \Theta^k(X) \\ \Omega_C^{n-k}(X) \rightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto \int_X u \wedge v \end{array} \right.$$

THÉORÈME 6 (POINCARÉ) – *Pour toute variété X , C^∞ orientée et paracompacte, le morphisme φ induit un isomorphisme en cohomologie, et on a par conséquent $H^k(X) = H_C^{n-k}(X)^*$.*

DÉMONSTRATION – On va encore utiliser la proposition 1. Commençons par le cas où $X = \mathcal{U}$, un ouvert convexe de \mathbb{R}^n . Comme il existe entre X et \mathbb{R}^n une équivalence d'homotopie propre, on peut même supposer que $X = \mathbb{R}^n$. La cohomologie de De Rham à support compact est alors connue et vaut 0 en tout degré sauf en degré n où elle vaut \mathbb{R} . La cohomologie de De Rham, elle, est nulle sauf en degré 0 où elle est de dimension 1, représentée par une fonction constante, disons $u = 1$. Il suffit donc de montrer que le morphisme : $H_C^n(X) \rightarrow \mathbb{R}$, qui a une n -forme v associe son intégrale sur \mathbb{R} est un isomorphisme. Mais comme elle est linéaire de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , il suffit de voir qu'elle est non nulle.

EXERCICE – *En utilisant les suites de Mayer-Vietoris, démontrer que si $X = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ ou \mathcal{U} , \mathcal{V} et $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ sont des ouverts de X pour lesquels la dualité de Poincaré est vraie, alors elle est vraie pour X également. (Indications : faire attention à la suite de Mayer-Vietoris pour la cohomologie de De Rham à support compact : elle va dans le sens opposé au sens habituel ; puis utiliser l'exactitude du foncteur $\text{Hom}(_, \mathbb{R})$.)*

Supposons maintenant que X s'écrive comme réunion d'une famille d'ouverts $(\mathcal{U}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ vérifiant $\forall i \ \mathcal{U}_i \subset \mathcal{U}_{i+1}$ et $\overline{\mathcal{U}_i}$ compact. On sait déjà que pour tout degré q , $\Omega^q(X) = \varprojlim_i \Omega^q(\mathcal{U}_i)$, et que de plus le système projectif $(\Omega^q(\mathcal{U}_i))_{i \in \mathbb{N}^*}$ vérifie les conditions du lemme 2. Remarquons à présent qu'on a $\Omega_C^{n-k}(X) = \varinjlim_i \Omega_C^{n-k}(\mathcal{U}_i)$. Il en découle immédiatement que $\Theta^k(X) = \varprojlim_i \Theta^k(\mathcal{U}_i)$.

EXERCICE – *Vérifier que le système projectif $(\Theta^k(\mathcal{U}_i))_{i \in \mathbb{N}^*}$ satisfait les conditions du lemme 2, et finir la preuve comme pour le théorème de De Rham. (Pour vérifier les conditions du lemme 2, utilisez de nouveau le lemme 4). \square*

3.3 (Co)homologies singulières lisse et non lisse

Comme annoncé plus haut, nous allons maintenant voir pourquoi les complexes singuliers lisses et non lisses définissent la même homologie et la même cohomologie. Soit donc X une variété C^∞ . On a un morphisme $i : C_\star^\mathcal{L}(X) \rightarrow C_\star(X)$, qui est tout simplement l'inclusion de $C_\star^\mathcal{L}(X)$ dans $C_\star(X)$. En appliquant le foncteur $\text{Hom}(_, \mathbb{R})$, on obtient $j : C^\star(X) \rightarrow C_\mathcal{L}^\star(X)$.

THÉORÈME 7 – *i et j induisent des isomorphismes en homologie et en cohomologie.*

DÉMONSTRATION – On commence par traiter le cas d'un convexe \mathcal{O} de R^n .

Afin de déterminer la cohomologie ou l'homologie (non lisse) d'un tel espace, on avait construit une équivalence d'homotopie entre lui et le point de la façon suivante. Soit $x_0 \in \mathcal{O}$, et $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow \{x_0\}$ l'application constante. Alors φ est une équivalence d'homotopie. En effet, si on note ι l'inclusion de $\{x_0\}$ dans \mathcal{O} , on a $\varphi \circ \iota = \text{Id}_{x_0}$. Maintenant, $\iota \circ \varphi$ est homotope à $\text{Id}_{\mathcal{O}}$ par l'application

$$\Phi \begin{cases} \mathcal{O} \times I & \rightarrow & \mathcal{O} \\ (x, t) & \mapsto & tx_0 + (1-t)x \end{cases}$$

qui est telle que $\Phi(x, 0) = \text{Id}_{\mathcal{O}}$ et $\Phi(x, 1) = \iota \circ \varphi(x) = x_0$. Mais dans le cas lisse, cette démonstration marche également car Φ est \mathcal{C}^∞ . Or, on montre l'invariance de la (co)homologie lisse par homotopie \mathcal{C}^∞ exactement comme dans le cas non lisse.

On peut donc affirmer que le cas d'un convexe est traité, car il se réduit au cas du point. Or, sur un point, les cubes continus sont lisses.

Pour les réunions de deux ouverts, il nous faut Mayer-Vietoris pour l'homologie et la cohomologie lisses. Mais cela s'obtient à partir d'une suite exacte de complexes semblable à celle qu'on écrit pour la théorie singulière non lisse, et qui reste exacte pour les cubes lisses.

La stabilité par isomorphisme et par réunion d'ouverts disjoints est immédiate.

Il reste le cas d'une réunion croissante d'ouverts. En homologie, on doit faire des limites inductives, c'est-à-dire qu'on a : $C_q^{\mathcal{L}}(\cup_i \mathcal{U}_i) = \varinjlim_i C_q^{\mathcal{L}}(\mathcal{U}_i)$ et la même chose sans le joli \mathcal{L} . Les homologies des limites sont alors les limites des homologies et elles sont donc égales. On n'a même pas besoin de supposer que la famille des ouverts (\mathcal{U}_i) vérifie d'autres hypothèses que la croissance, ni même de supposer qu'elle est indexée par \mathbb{N}^* , ce qui entraîne que les cubes lisses et les cubes non lisses définissent la même homologie pour n'importe quelle variété \mathcal{C}^∞ , qu'elle soit paracompacte ou non. En cohomologie, en revanche, on doit prendre des limites projectives. Mais si $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$, alors $C_{\mathcal{L}}^q(\mathcal{V}) \rightarrow C_{\mathcal{L}}^q(\mathcal{U})$ est une surjection car $C_{\mathcal{L}}^q(\mathcal{U})$ est un facteur direct de $C_{\mathcal{L}}^q(\mathcal{V})$, les fonctions sur le premier se prolongent donc sans problème aux fonctions sur le second. Il en va de même pour le cocomplexe non lisse. On a donc terminé la preuve, mais en revanche, on n'obtient le théorème en cohomologie que pour les variétés paracompactes. \square

Bibliographie

Pour cet exposé, on pourra consulter [Mas1], [DR], [Spi], [Mas2], [Poin].

Le théorème d'unicité d'Eilenberg-Steenrod

Yann Ollivier

Ce théorème, énoncé dans [ES], affirme que deux théories (co)homologiques sur des complexes simpliciaux finis sont isomorphes (un complexe simplicial est une réunion de simplexes collés par certaines de leurs faces).

Après avoir précisé ce qu'on entend par « théorie (co)homologique » dans ce cadre, on donne quelques éléments de la démonstration. Notre propos n'est pas de démontrer complètement le théorème mais d'expliquer succinctement la démarche.

Le mot-clé est évidemment « fini » ; si l'on enlève cette hypothèse, même pour des variétés on peut trouver différentes notions de cohomologies incompatibles dans leur traitement de l'infini : cohomologies à support compact, L^2 ...

Par la suite, tous les espaces topologiques considérés seront supposés être des complexes simpliciaux finis. Le théorème s'applique donc à tout espace finiment triangulable, et en particulier aux variétés différentielles.

Les formulations homologiques et cohomologiques sont équivalentes ; on travaille en homologie.

1 Théories homologiques

Une théorie homologique H dans la catégorie des complexes simpliciaux finis (avec les applications simpliciales), à valeurs dans un groupe G , est la donnée pour chaque paire X, A ($A \subset X$), d'un G -module gradué $H_*(X, A; G)$ ainsi que d'un opérateur de bord $\partial : H_q(X, A) \rightarrow H_{q-1}(A)$, vérifiant les propriétés classiques suivantes :

1. l'application qui à X, A associe $H_*(X, A)$ est fonctorielle ;
2. le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H_q(X, A) & \xrightarrow{f} & H_q(Y, B) \\ \partial \downarrow & & \downarrow \partial \\ H_{q-1}(A) & \xrightarrow{f} & H_{q-1}(B) \end{array}$$

3. la suite exacte d'une paire est vérifiée :

$$H_q(A) \longrightarrow H_q(X) \longrightarrow H_q(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(A) \longrightarrow \dots$$

4. si les deux applications $(X, A) \begin{matrix} \xrightarrow{f_1} \\ \xrightarrow{f_2} \end{matrix} (Y, B)$ sont homotopes, alors les applications induites en homologie sont égales ;

5. la propriété d'excision est vérifiée : si U est un ouvert de X tel que l'adhérence de U est contenue dans l'intérieur de A , l'application induite par l'inclusion

$$H_q(X - U, A - U) \rightarrow H_q(X, A)$$

est un isomorphisme ;

6. si X est réduit à un point, on a $H_q(X) = 0$ pour $q \geq 1$, et $H_0(X) = G$.

Dans ce qui suit, on utilisera aussi la suite exacte de Mayer-Vietoris, qui est une conséquence formelle de ces axiomes.

Voici le théorème :

THÉORÈME 1 (EILENBERG - STEENROD) - Soient H_* et \mathcal{H}_* deux théories homologiques à coefficients dans G et \mathcal{G} , et soit $\varphi : G \rightarrow \mathcal{G}$ un morphisme de groupes. Alors pour tout complexe simplicial fini X , pour tout $A \subset X$ (et donc pour tout espace topologique finiment triangulable), on a un unique morphisme de modules différentiels gradués de $H_*(X, A)$ dans $\mathcal{H}_*(X, A)$, covariant en (X, A) , confondu avec φ si X est un point. De plus, si φ est un isomorphisme, ce morphisme aussi.

2 Étapes de la démonstration

Soit H une théorie homologique sur les complexes simpliciaux finiment triangulés. Il suffit de montrer que H est isomorphe à l'homologie combinatoire du complexe simplicial (celle dont les chaînes sont les cellules du complexe, et l'opérateur bord, le bord dans le complexe).

L'idée est de « récupérer » le complexe simplicial de manière formelle à partir de son homologie. On note K^q le q -squelette du complexe K (i.e. les cellules de dimension inférieure à q). On pose :

$$C_q(K) = H_q(K^q, K^{q-1})$$

On va montrer que cet espace s'identifie aux cellules de dimension q du complexe ; l'homologie des $C_q(K)$ est donc l'homologie combinatoire du complexe, et on montrera, grâce à cette expression algébrique en fonction de la théorie H , qu'elle est isomorphe à H .

Montrons d'abord que $C_q(K)$ s'identifie aux faces de dimension q de K . Ensemblistement, K^q est une union de q -simplexes, et l'intersection de deux d'entre eux est incluse dans K^{q-1} . Par conséquent, en écrivant la suite exacte de Mayer-Vietoris, on trouve simplement

$$H_p(K^q, K^{q-1}) = \bigoplus_{s \text{ cellule de dimension } q} H_p(s, \partial s)$$

Or $H_p(s, \partial s)$ est explicitement calculable à partir des axiomes, à coups d'homotopie et autres. C'est G (l'espace des coefficients) si $p = q$ (cas qui nous intéresse ici), 0 si $p \neq q$ (ce qui nous servira plus tard). Notre espace C_q s'identifie donc aux faces de dimension q du simplexe.

Reste à construire un bon opérateur de bord sur C_q . Dans notre théorie cohomologique H , on a un extrait de longue suite exacte du triplet (K^q, K^{q-1}, K^{q-2}) :

$$H_q(K^q, K^{q-1}) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(K^{q-1}, K^{q-2})$$

qui va donc de $C_q(K)$ vers $C_{q-1}(K)$ et est un candidat rêvé comme opérateur bord. On peut vérifier qu'il s'identifie bien avec le bord habituel des q -cellules de K .

L'homologie des $C_q(K)$ pour cet opérateur de bord est donc l'homologie combinatoire du complexe K . Avoir construit cette dernière à partir de H selon un procédé algébrique va permettre d'identifier les deux en chassant dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & H_{q+1}(K^{q+1}, K^q) & & & & H_{q-1}(K^{q-2}) \\
 & & \downarrow \partial & \searrow \partial_{q+1} & & & \downarrow \\
 H^q(K^{q-1}) & \longrightarrow & H_q(K^q) & \longrightarrow & H_q(K^q, K^{q-1}) & \xrightarrow{\partial} & H_{q-1}(K^{q-1}) \\
 & & \downarrow & & \searrow \partial_q & & \downarrow \\
 & & H_q(K^{q+1}) & & & & H_{q-1}(K^{q-1}, K^{q-2}) \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & H^q(K^{q+1}, K^q) & & & &
 \end{array}$$

À noter que la ligne diagonale est celle qui nous intéresse : le quotient de l'image de ∂_{q+1} par le noyau de ∂_q est l'homologie combinatoire des $C_q K$, on veut montrer qu'elle est isomorphe à H_q .

La ligne horizontale est la suite exacte longue de K^q, K^{q-1} ; les lignes verticales, de K^{q+1}, K^q et K^{q-1}, K^{q-2} . Le diagramme est commutatif par définition de la suite exacte d'un triplet à partir de la suite exacte d'une paire.

On utilise la suite exacte

$$H_{q+1}(K^{p+1}, K^p) \rightarrow H_q(K^p) \rightarrow H_q(K^{p+1}) \rightarrow H_q(K^{p+1}, K^p)$$

et le fait énoncé plus haut que $H_q(K^{p+1}, K^p)$ est nul pour $q \neq p+1$; cela donne, en particulier, que $H_q(K^{q+1}) = H_q(K^{q+2}) = \dots = H_q(K)$, d'une part, et que $H_q(K^{q-1}) = H_q(K^{q-2}) = \dots = 0$ d'autre part.

Remplaçant dans le diagramme, on trouve :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \mathcal{C}_{q+1}(K) & & & & 0 \\
 & & \downarrow \partial & \searrow \partial_{q+1} & & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & H_q(K^q) & \xrightarrow{j} & \mathcal{C}_q(K) & \xrightarrow{\partial} & H_{q-1}(K^{q-1}) \\
 & & \downarrow & & \searrow \partial_q & & \downarrow \\
 & & H_q(K) & & & & \mathcal{C}_{q-1}(K) \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & & &
 \end{array}$$

Une simple chasse au diagramme montre alors que

$$\text{Ker } \partial_q / \text{Im } \partial_{q+1} = \text{Ker } \partial / \text{Im } \partial_{q+1} = \text{Im } j / \text{Im } \partial_{q+1} = H^q(K^q) / \text{Im } \partial = H_q(K)$$

ce qui démontre l'isomorphisme entre l'homologie simpliciale et la théorie homologique H .

Bibliographie

Pour cet exposé, on pourra consulter [ES].

Quelques résultats sur la caractéristique d'Euler

Julien Marché

Dans cet exposé, on rappelle les définitions et premières propriétés de la caractéristique d'Euler. On donne ensuite des éléments de théorie de Morse (points critiques des fonctions réelles sur les variétés) et son lien avec la cohomologie. On construit ensuite la classe cohomologique de Thom pour un fibré vectoriel ; on en donne de nombreuses applications à l'étude des champs de vecteurs.

1 Notations et définitions

Soit M une variété différentiable réelle. On note $H^i(M)$ le i -ème module de cohomologie de Rham de M à coefficients réels. S'ils sont de dimension finie. On définit la caractéristique d'Euler de M et on note

$$\chi(M) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim H^i(M).$$

Il est immédiat d'après la définition que la caractéristique d'Euler est invariante par difféomorphisme. On s'intéresse dans toute la suite de cet exposé aux multiples propriétés et aux calculs de cette caractéristique.

On appelle i -ème nombre de Betti et on note $b_i(M)$ la dimension de $H^{n-i}(M)$. On peut déjà donner quelques calculs de caractéristique d'Euler :

PROPOSITION 1 –

1. $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$
2. $\chi(M \times N) = \chi(M)\chi(N)$
3. Si M est une surface de genre g , $\chi(M) = 2 - 2g$
4. Si W est une variété de bord M , alors $\chi(W, M) = \chi(W) - \chi(M)$
5. Si M est réunion de deux ouverts U et V , alors $\chi(M) + \chi(U \cap V) = \chi(U) + \chi(V)$.

DÉMONSTRATION – La démonstration consiste seulement à calculer les cohomologies des espaces considérés. Si on définit $P_X(t) = \sum_i b_i(X) t^i$, on a bien sûr que $\chi(X) = P_X(-1)$.

La formule de Künneth nous dit que $P_{X \times Y} = P_X P_Y$. La propriété 2. est alors évidente. La

propriété 4. résulte de la suite exacte du triplet, la propriété 5. de celle de Mayer-Vietoris. La propriété 3. se déduit du calcul des cohomologies ou en considérant des recouvrements et en appliquant la propriété 5. \square

Une des principales et des plus intéressantes propriétés de la caractéristique d'Euler est son lien avec les champs de vecteurs tangents. Mais ce lien n'est pas évident à démontrer, et l'une des possibilités est de passer par la théorie de Morse.

2 Théorie de Morse

2.1 Propriétés principales

Soit M une variété différentiable compacte de dimension n et f une fonction C^∞ définie sur M à valeurs dans \mathbb{R} .

Soit x un point critique de f et X, Y deux champs de vecteurs définis au voisinage de x . Alors $H(X, Y) = (X \cdot Y \cdot f)(x)$ ne dépend que de la valeur de X et Y en x . En effet, ceci ne dépend que de la valeur de X en x et comme $H(X, Y) - H(Y, X) = ([X, Y] \cdot f)(x) = 0$ (car x est un point critique), H est symétrique, et cela ne dépend aussi que de la valeur de Y en x .

DÉFINITION 1 – On appelle hessienne de f en x , point critique de f la forme bilinéaire symétrique H . On dit que x est un point critique non dégénéré si H est non dégénérée. On appelle indice de x le nombre de -1 qui apparaissent dans la réduction de la forme quadratique associée à H .

Enfin on appelle fonction de Morse une fonction dont tous les points critiques sont non dégénérés et dont les valeurs sont distinctes.

L'élément essentiel de cette théorie est le lemme de Morse :

PROPOSITION 2 – Soit x un point critique non dégénéré de f d'indice p . Il existe alors un système de coordonnées locales (y_1, \dots, y_n) centrées en x tel que f ait pour expression dans ces coordonnées

$$f = f(x) - y_1^2 - \dots - y_p^2 + \dots + y_n^2.$$

Ce lemme montre en particulier que les points critiques d'une fonction de Morse sont isolés donc en nombre finis car M est ici supposée compacte.

THÉORÈME 1 – Pour toute variété C^∞ , il existe une fonction de Morse.

DÉMONSTRATION – La démonstration est donnée dans la deuxième partie, comme application du théorème de Sard. \square

Soit f une fonction de Morse sur M , pour tout a qui ne soit pas une valeur critique de f , on note $M_a = f^{-1}(] - \infty, a])$. M_a est alors une sous variété de dimension n de M de bord $M^a = f^{-1}(\{a\})$.

THÉORÈME 2 – Si $[a, b]$ est un intervalle ne contenant aucune valeur critique de f , alors il existe un difféomorphisme h de $M^a \times [a, b]$ sur $f^{-1}([a, b])$ tel que pour tout $(x, t) \in M^a \times [a, b]$, $f(h(x, t)) = t$.

DÉMONSTRATION – On munit M d'une structure riemannienne. Soit Φ_t le flot de $\text{grad } f / \|\text{grad } f\|$. On pose alors $h(x, t) = \Phi_{t-a}(x)$ qui satisfait bien l'équation du théorème car $\text{grad } f$ ne s'annule jamais sur $f^{-1}([a, b])$. De plus, l'inverse est donné par $h^{-1}(y) = (\Phi_{a-f(y)}, f(y))$ ce qui garantit bien que h est un difféomorphisme. \square

Il nous reste maintenant à caractériser la cohomologie de M en terme des points critiques de f ce que fait en partie le théorème suivant :

THÉORÈME 3 – Si $[a, b]$ est un intervalle compact de $f(M)$ ne contenant que la valeur critique c ($a < c < b$), et si p est l'indice du point critique x correspondant, alors

$$\begin{aligned} H^q(M_b, M_a) &= 0 \text{ si } q \neq p \\ &\mathbb{R} \text{ si } q = p \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION – D'après le lemme de Morse, on peut trouver un système de coordonnées locales (y_1, \dots, y_n) centrées en x définies sur un ouvert U telles que $f|_U = c - y_1^2 - \dots - y_p^2 + \dots + y_n^2$.

On peut de plus supposer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que c soit la seule valeur critique dans $]c - \varepsilon, c + \varepsilon[$ et que pour tout i et tout $y \in U$, $y_i^2 \leq \varepsilon$.

Le théorème précédent nous dit en particulier que si $[c, d]$ ne contient aucune valeur critique de f , alors M_d se rétracte par déformation sur M_c , cela nous permet de choisir $a = c - \frac{\varepsilon}{2}$ et $b = c + \frac{\varepsilon}{2}$.

Si p est nul, la variété M_b est difféomorphe à l'union disjointe de M_a avec une boule fermée B^n . On a donc $H^0(M_b, M_a) = \mathbb{R}$ et $H^q(M_b, M_a) = 0$ pour tout $q > 0$. Dans le cas général, M_b est difféomorphe à M_a où l'on a rajouté une anse d'indice p . Cette opération est définie de la manière suivante. Considérons $H_p = B^p \times B^{n-p}$, c'est une variété à coins dont le bord se décompose en une zone d'attachement $S^{p-1} \times B^{n-p}$ et une surface latérale $B^p \times S^{n-p-1}$. Si on se donne un plongement φ de la zone d'attachement dans M_a , on peut considérer la variété $M_a \cup_\varphi H_p$ comme une variété différentiable après avoir lissé les coins.

PROPOSITION 3 – La variété M_b est difféomorphe à la variété M_a à laquelle on a rajouté une anse d'indice $n - p$.

En effet, considérons un voisinage U du point critique : à l'extérieur, la variété $M_b \setminus U$ se rétracte difféomorphiquement sur $M_a \setminus U$, et à l'intérieur, le lemme de Morse décrit une situation semblable à celle qui est représentée sur le schéma. Il est alors clair que l'on passe de M_a à M_b en rajoutant une anse d'indice p .

$$\begin{aligned} H^q(M_b, M_a) &= H^q(H_p, S^{p-1} \times B^{n-p}) \\ &= H^q(B^p, S^{p-1}) \text{ par rétraction} \\ &= 0 \text{ si } q \neq p \text{ et } \mathbb{R} \text{ si } q = p. \end{aligned}$$

\square

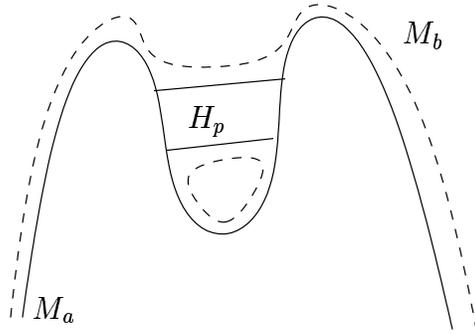


FIG. 1: Singularité d'une fonction de Morse

On déduit ainsi de la suite exacte du triplet (\emptyset, M_a, M_b) :

$$\dots \longrightarrow H^q(M_b, M_a) \longrightarrow H^q(M_b) \longrightarrow H^q(M_a) \longrightarrow H^{q+1}(M_b, M_a) \longrightarrow \dots$$

que si $p = 0$, $b_0(M_b) = b_0(M_a) + 1$ et $b_q(M_b) = b_q(M_a)$ pour tout $q > 0$.

Puis si $p > 0$, comme $H^{q+1}(M_b, M_a) = H^{q-1}(M_b, M_a) = 0$, la suite exacte devient :

$$0 \longrightarrow H^{p-1}(M_b) \longrightarrow H^{p-1}(M_a) \longrightarrow H^p(M_b, M_a) \longrightarrow H^p(M_b) \longrightarrow H^p(M_a) \longrightarrow 0.$$

On en déduit que $b_{p-1}(M_b) \leq b_{p-1}(M_a)$, $b_p(M_b) \geq b_p(M_a)$ grâce à l'injection et à la surjection puis, $b_{p-1}(M_a) - b_{p-1}(M_b) + b_p(M_b) - b_p(M_a) = 1$ comme la suite ci-dessus est exacte. Il n'y a donc que deux cas possibles résumés dans l'expression suivante :

$$\begin{aligned} b_{p-1}(M_b) &= b_{p-1}(M_a) - \varepsilon \\ b_p(M_b) &= b_p(M_a) + (1 - \varepsilon) \end{aligned}$$

où ε vaut 0 ou 1.

COROLLAIRE – Les cohomologies d'une variété compacte sont de dimension finie.

DÉMONSTRATION – Soit f une fonction de Morse sur M et $c_1 < \dots < c_r$ ses valeurs critiques. Soit a_i une suite de nombres réels vérifiant $a_0 < c_1 < a_1 \dots < a_{r-1} < c_r < a_r$. Alors M_{a_0} est vide donc ses cohomologies sont de dimension finie, puis par récurrence, grâce au théorème précédent, $M_{a_r} = M$ a ses cohomologies de dimension finie. \square

2.2 Inégalités de Morse

Appelons C_q le nombre de points critiques d'indice q de M .

THÉORÈME 4 –

1. $b_q(M) \leq C_q$ pour tout q
2. $\chi(M) = \sum_{q=0}^n (-1)^q C_q$

DÉMONSTRATION – On garde les mêmes notations que dans le corollaire précédent, et on montre la propriété par récurrence sur les M_{a_i} , la proposition étant trivialement vraie pour M_{a_0} . Notons $C_q(a)$ le nombre de points critiques d'indice q de $f|_{M_a}$.

Supposons la proposition vraie jusqu'au rang i , on rappelle que si p est l'indice de la valeur critique a_{i+1} , et $p = 0$ alors $b_0(M_b) = b_0(M_a) + 1$ et $b_q(M_b) = b_q(M_a)$ pour tout $q > 0$. Comme $C_0(a_{i+1}) = C_0(a_i) + 1$ et $C_q(M_b) = C_q(M_a)$ pour tout $q > 0$, la proposition est encore vraie au rang $i + 1$.

Si $p > 0$, comme $C_p(a_{i+1}) = C_p(a_i) + 1$ et $C_q(M_b) = C_q(M_a)$ pour tout $q \neq p$ et comme

$$\begin{aligned} b_{p-1}(M_b) &= b_{p-1}(M_a) - \varepsilon \\ b_p(M_b) &= b_p(M_a) + (1 - \varepsilon) \end{aligned}$$

on voit que $b_q(M_{a_{i+1}}) = b_q(M_{a_i}) \leq C_q(a_i) = C_q(a_{i+1})$ pour tout $q \neq p - 1, p$.

Puis $b_{p-1}(M_{a_{i+1}}) = b_{p-1}(M_{a_i}) - \varepsilon \leq b_{p-1}(M_{a_i}) \leq C_{p-1}(a_i) = C_{p-1}(a_{i+1})$ et $b_p(M_{a_{i+1}}) = b_p(M_{a_i}) + 1 - \varepsilon \leq b_p(M_{a_i}) + 1 \leq C_p(a_i) + 1 = C_p(a_{i+1})$.

Quant à la caractéristique d'Euler, il est clair que $\chi(M_{a_{i+1}}) = \chi(M_{a_i}) + (-1)^p$ et $\sum_{q=0}^n (-1)^q C_q(a_{i+1}) = \sum_{q=0}^n (-1)^q C_q(a_i) + (-1)^p$ donc par hypothèse de récurrence, $\chi(M_{a_{i+1}}) = \sum_{q=0}^n (-1)^q C_q(a_{i+1})$. \square

2.3 Conséquences

THÉORÈME 5 – Soit $p : M \rightarrow N$ un revêtement entre deux variétés compactes et m le nombre de feuillets. Alors $\chi(M) = m\chi(N)$.

DÉMONSTRATION – Soit f une fonction de Morse sur N alors $g = f \circ p$ a tous ses points critiques non dégénérés mais n'est pas une fonction de Morse sur M , cela en fait n'influe pas beaucoup sur la démonstration précédente. On a alors que $C_q(g) = nC_q(f)$ d'où la proposition. \square

En particulier, l'ordre d'un groupe fini opérant différenciablement et librement sur une variété compacte sans bord divise sa caractéristique d'Euler.

THÉORÈME 6 – Si M est compacte et de dimension impaire, $\chi(M) = 0$.

DÉMONSTRATION – Soit f une fonction de Morse sur M , alors $-f$ est encore une fonction de Morse et $C_q(-f) = C_{n-q}(f)$. Ainsi

$$\begin{aligned} \chi(M) &= \sum_{i=0}^n (-1)^i C_{n-i}(f) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} C_i(f) \\ &= (-1)^n \chi(M) \end{aligned}$$

Comme on a supposé que n était impair, cela implique que $\chi(M) = 0$ \square

3 L'application de Gauss

3.1 Préliminaires

Soit M une variété compacte de dimension n plongée dans l'espace euclidien \mathbb{R}^m muni de sa métrique et de son orientation canonique. Soit $d = m - n$ la codimension de M . On appelle N le fibré normal de M et NU son fibré normal unitaire, c'est à dire $NU = \{(x, v), x \in M, v \in (T_x M)^\perp, |v| = 1\}$.

PROPOSITION 4 – *NU est une variété munie d'une forme volume canonique. Elle est en particulier orientable.*

DÉMONSTRATION – L'application $n : N \rightarrow \mathbb{R}$ qui à (x, v) associe $|v|$ est submersive en NU ce qui prouve que NU est bien une sous-variété de N de dimension $m - 1$. On peut définir deux applications canoniques : $p : NU \rightarrow M$ qui à (x, v) associe x et $\gamma : NU \rightarrow S^{m-1}$ qui à (x, v) associe v . Cette dernière application est appelée application de Gauss.

Montrons tout d'abord que N est orientable. N admet une structure riemannienne canonique, il suffit donc de déterminer le signe de l'orientation. En un point de la forme $(x, 0)$ l'espace tangent de N se confond avec celui de \mathbb{R}^m qui est donc naturellement orienté. Si on impose à l'orientation d'être la même sur toute la fibre, on en déduit une orientation globale de N par une forme canonique que l'on appelle δ .

Puis $\omega = i_{\text{grad } n} \delta$ est une forme volume sur NU , ce qui prouve que cette variété est orientable.

THÉORÈME 7 – *Soit $v \in \mathbb{R}^m$ de norme unité et $f_v : M \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_v(x) = \langle x, v \rangle$. Alors x est un point critique pour f si et seulement si $v \in (T_x M)^\perp$ et x est non-dégénéré si et seulement si l'application γ est régulière en (x, v) . De plus le jacobien de γ en (x, v) a le même signe que $(-1)^{n+p}$ où p est l'indice de f_v en x .*

DÉMONSTRATION – La première partie résulte du fait que $\text{grad } f_v = v^T$ où v^T désigne la projection orthogonale de v sur $T_x M$. Pour la deuxième partie, il faut choisir judicieusement une paramétrisation de M et NU en x .

Soit (U, φ) un système de coordonnées locales centrées en x où on peut supposer quitte à faire un changement de variable linéaire que $(\frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(0))_{i=1\dots n}$ est orthonormée.

Soit $f = f_v \circ \varphi$, alors on peut supposer de plus que la matrice $(\frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}(0))_{i,j=1\dots n}$ est diagonale par réduction des formes quadratiques dans le groupe orthogonal. Quitte à restreindre U , on peut compléter la base $(\frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(0))_{i=1\dots n}$ en une base orthonormale de $(T_x M)^\perp$, $(\nu_{n+1}, \dots, \nu_m)$ telle que $\nu_{n+1}(0) = v$ et telle que la base totale soit directe au sens de N .

On dispose alors de la paramétrisation de N suivante :

$$\Phi : U \times \mathbb{R}^d \rightarrow N, \quad \Phi(u, t_{n+1}, \dots, t_m) = (\varphi(u), \sum_{j=n+1}^m t_j \nu_j).$$

Caractérisons la régularité de γ en $(x, v) = \Phi(0, t) : d\gamma(\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}) = d(\gamma \circ \Phi)(0, t)(e_i)$ où $e_i = \frac{\partial}{\partial u_i}$.

On a la même formule pour les vecteurs de base $\nu_j(u)$.

De plus $\gamma \circ \Phi(z, s) = \sum_{j=n+1}^m s_j \nu_j(z)$, et comme $t = (1, 0, \dots, 0)$, $d(\gamma \circ \Phi)(0, t)(e_i) = \frac{\partial \nu_{n+1}}{\partial u_i}$.

Enfin, si $f_j = \frac{\partial}{\partial \nu_j}$, $d(\gamma \circ \Phi)(0, t)(f_j) = \nu_j(0)$.

Ainsi, dans les bases choisies qui sont directes, $d(\gamma \circ \Phi)$ a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} (\frac{\partial \nu_{n+1}}{\partial u_i}(0))^T & 0 \\ (\frac{\partial \nu_{n+1}}{\partial u_i}(0))^\perp & Id \end{pmatrix}$$

De l'autre côté, il faut calculer les coefficients de la hessienne de f en 0 qu'on a supposée diagonale.

Par définition, $f(z) = \langle v, \varphi(z) \rangle$ donc $\frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}(0) = \langle v, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_i \partial u_j}(0) \rangle$.

De plus comme par définition de φ , $\langle \nu_{n+1}(z), \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(z) \rangle = 0$, on obtient en dérivant,

$$\langle \frac{\partial \nu_{n+1}}{\partial u_j}(z), \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(z) \rangle + \langle \nu_{n+1}(z), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_i \partial u_j}(z) \rangle = 0.$$

ce qu'on peut encore écrire, en prenant la valeur en 0,

$$\langle (\frac{\partial \nu_{n+1}}{\partial u_j}(0))^T, \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(0) \rangle + \langle v, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_i \partial u_j}(0) \rangle = 0.$$

En remplaçant l'expression précédente, on obtient

$$\langle (\frac{\partial \nu_{n+1}}{\partial u_j}(0))^T, \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(0) \rangle = -\frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}(0).$$

Comme cette dernière matrice est supposée diagonale et la base $(\frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(0))$ orthonormée, il

résulte que $(\frac{\partial \nu_{n+1}}{\partial u_j}(0))^T = -\frac{\partial^2 f}{\partial u_i^2}(0) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(0)$. Ainsi, $(0, t)$ est non-dégénéré si et seulement si

tous les $\frac{\partial^2 f}{\partial u_i^2}(0)$ sont non nuls, si et seulement si la jacobienne de $\gamma \circ \Phi$ est inversible. Le signe

de son déterminant est celui produit des $-\frac{\partial^2 f}{\partial u_i^2}(0)$, soit $(-1)^n$ fois celui du produit des $\frac{\partial^2 f}{\partial u_i^2}(0)$, donc $(-1)^n$ fois l'indice de f en $(0, t)$ qui n'est autre que l'indice de f_v en (x, v) . \square

3.2 Conséquences

THÉORÈME 8 –

$$\deg \gamma = \chi(M)$$

DÉMONSTRATION – D'après le théorème de Sard, il existe une valeur régulière de γ que l'on appelle v . Alors $\gamma^{-1}(v) = \bigcup \{x_i, v\}$ est fini et l'application f_v est presque une fonction de Morse. Grâce aux inégalités de Morse, on a

$$\begin{aligned} \chi(M) &= \sum_{j=0}^n (-1)^j C_j(f_v) \\ &= \text{Card} \{x_i \text{ d'indice pair}\} - \text{Card} \{x_i \text{ d'indice impair}\} \\ &= (-1)^n \text{Card} \{x_i \text{ de jacobien positif}\} - (-1)^n \text{Card} \{x_i \text{ de jacobien négatif}\} \\ &= (-1)^n \text{deg } \gamma = \text{deg } \gamma. \end{aligned}$$

□

4 La classe de Thom

4.1 Définition et propriétés

Soit $\pi : E \rightarrow M$ un fibré orienté de dimension k au-dessus d'une variété compacte de dimension n . On note $\Theta : H_c^*(E) \rightarrow H^{*-k}(M)$ l'intégration sur les fibres définie de la manière suivante :

Soit $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ une trivialisatation au-dessus de U qui soit directe sur les fibres, et α une forme de degré p à support compact dans chaque fibre. Alors, $\varphi_*\alpha \in \Omega_c^p(U \times \mathbb{R}^k) \cong \bigoplus_{i+j=p} \Omega_c^i(U \times \mathbb{R}^k) \otimes \Omega_c^j(U \times \mathbb{R}^k)$. On projette alors sur le terme $j = k$ s'il existe et on applique la fonction $\beta \otimes \gamma \rightarrow \int_{\mathbb{R}^k} \beta \wedge \gamma$ sachant que β n'intervient que comme une fonction numérique.

Il suffit de prendre l'image réciproque par $\varphi|_U$ de cette forme pour obtenir $\Theta(\alpha)$.

THÉORÈME 9 – *La définition de Θ ne dépend pas de la carte choisie, Θ commute avec la différentielle et réalise un isomorphisme de $H_c^*(E) \rightarrow H^{*-k}(M)$.*

DÉMONSTRATION – Prenons deux trivialisations directes φ, ψ , le changement est décrit par une matrice A directe telle que $h(x, \xi) = \varphi \circ \psi^{-1}(x, \xi) = (x, A(x)\xi)$. Il est clair que h^* conserve la structure graduée de $\Omega_c^p(U \times \mathbb{R}^k)$. On peut donc directement considérer que $\alpha = \beta \otimes d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_k$. Son image réciproque par h est $h^*\alpha = h^*\beta \otimes \det Ad\xi$. Donc son intégrale sur les fibres est $\int_{\mathbb{R}^k} h^*\beta \otimes \det A d\xi$. Comme $\det(A) > 0$ et que le rôle de β dans cette intégrale est purement multiplicatif, la formule de changement de variables s'applique et montre que la forme $\Theta(\alpha)$ est bien définie.

Pour montrer que Θ commute avec la différentielle, il faut calculer, sauf si $* = k$ (qui est le seul cas qui nous intéresse) : en effet, considérons une injection linéaire $i_x : \mathbb{R}^k \rightarrow E$ qui réalise un isomorphisme sur la fibre $\pi^{-1}(x)$. Alors $\Theta(\alpha)_x = \int_{\mathbb{R}^k} i_x^*\alpha$. Par isotopie, on peut déplacer i_x dans les fibres voisines, et le lemme de Poincaré nous dit que les formes $i_x^*\alpha$ seront cohomologues. Leur intégrale est donc constante, et $\Theta(\alpha)$ est localement constante.

Pour montrer que Θ est un isomorphisme, on le montre d'abord pour un fibré trivial au dessus d'un ouvert contractile. Mais dans ce cas le fibré est rétractible à \mathbb{R}^k au dessus d'un point et la proposition revient à montrer que $H_c^*(\mathbb{R}^k)$ est isomorphe à \mathbb{R} si $*$ = k , nulle sinon, et que l'isomorphisme est donné par l'intégration. Puis, si on munit M d'une structure riemannienne, comme M est compacte, elle est complète et au voisinage de chaque point, on peut trouver un ouvert convexe au sens riemannien. Cet ouvert est aussi contractile et le fibré est trivial au dessus de lui. On extrait un recouvrement fini de tels ouverts, et par récurrence grâce à la suite de Mayer-Vietoris, on montre que Θ est un isomorphisme sur le fibré tout entier. \square

DÉFINITION 2 – On appelle classe de Thom du fibré l'image réciproque par Θ de $1 \in H^0(M)$.

Si T est la classe de Thom, son intégrale sur chaque fibre vaut 1 et cette propriété la caractérise. De plus, l'application réciproque de Θ est $\alpha \mapsto T \wedge \pi^* \alpha$.

4.2 Liens avec la caractéristique d'Euler

Revenons au cas de l'application de Gauss. On dispose de $M \subset \mathbb{R}^m$ variété orientée compacte plongée. Soit (E, π_E) le fibré induit du fibré tangent de \mathbb{R}^m par l'injection de M . Soit (N, π_N) le fibré normal de M et (T, π_T) son fibré tangent. On a bien sûr, $E = N \oplus T$. Soit ν et τ les classes de Thom des fibrés orientés N et T . Enfin, pour fixer une fois pour toutes les notations, soit i_N et i_T les injections de M dans N et T par la section nulle, puis p_N et p_T les projections orthogonales fibre par fibre de E sur N et T respectivement.

PROPOSITION 5 – La classe de Thom de E est $p_N^* \nu \wedge p_T^* \tau$.

DÉMONSTRATION – La forme ci-dessus est bien fermée, de degré n , et son intégrale sur chaque fibre vaut 1. \square

Soit $e = \gamma^* \sigma \in H^{m-1}(NU)$, où σ est la forme volume canonique de S^{m-1} . On a vu au chapitre précédent que $\deg \gamma = \chi(M)$. Donc $\int_{NU} e = \chi(M) \int_{S^{m-1}} \sigma = \chi(M)$.

PROPOSITION 6 – L'application $\Gamma : N \rightarrow \mathbb{R}^m$ définie par $\Gamma(x, v) = v$ induit en H_c^m la multiplication par $\chi(M)$ (les générateurs sont choisis d'intégrale unité).

DÉMONSTRATION – Tout revient ici à bien choisir les générateurs. Soit φ une fonction C^∞ positive à support compact inclus dans $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ telle que $\int_{\mathbb{R}^+} t^{m-1} \varphi(t) dt = 1$.

On définit ensuite $r : S^{m-1} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ par $r(x, t) = tx$ et $r' : NU \times \mathbb{R}^+$ par la même équation. Alors $r_*(\sigma \wedge \varphi(t) dt)$ est un générateur de $H_c^m(\mathbb{R}^m)$ grâce à la formule de changement de variables. De plus

$$\begin{aligned} \int_N \Gamma^* r_*(\sigma \wedge \varphi(t) dt) &= \int_{NU \times \mathbb{R}^+} r'_*(e \wedge \varphi(t) dt) \\ &= \int_{NU} e \int_{\mathbb{R}^+} t^{m-1} \varphi(t) dt \\ &= \chi(M) \end{aligned}$$

□

Soit ξ un générateur de $H_c^m(\mathbb{R}^m)$ et $\omega = \Gamma^*\xi \in H_c^m(N)$. Si on étend Γ en Γ' à E tout entier, il est clair que la classe de Thom de E est donnée par $\Gamma'^*\xi$ puisque son intégrale sur chaque fibre vaut 1. Si on appelle j_N l'inclusion de N dans E , alors $\omega = \Gamma^*\xi = j_N^*\Gamma'^*\xi = j_N^*(p_N^*\nu \wedge p_T^*\tau)$ d'après la propriété précédente.

Continuant ce calcul, $\omega = \nu \wedge (\pi_N^*i_T^*\tau)$ car $p_N \circ j_N = Id_N$ et $p_T \circ j_N = i_T \circ \pi_N$. On reconnaît ici l'isomorphisme inverse de Thom. Donc si on appelle Θ l'intégration sur les fibres de N , $\Theta(\omega) = i_T^*\tau$. Donc comme M est orientable,

$$\int_M i_T^*\tau = \int_M \Theta(\omega).$$

Soit (U_i, φ_i) un recouvrement de M par des trivialisations directes de N . Soit λ_i une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement.

$$\begin{aligned} \int_M \Theta(\omega) &= \sum_i \int_{U_i} \lambda_i \Theta(\omega) \\ &= \sum_i \int_{\varphi_i(U_i)} \varphi_{i*}(\lambda_i \Theta(\omega)) \\ &= \sum_i \int_{\varphi_i(U_i)} \lambda_i \circ \varphi_i^{-1} \Theta(\varphi_{i*}\omega) \\ &= \sum_i \int_{\varphi_i(U_i) \times \mathbb{R}^k} \lambda_i \circ \varphi_i^{-1}(\varphi_{i*}\omega) \\ &= \int_N \omega = \chi(M) \end{aligned}$$

Ainsi, $\int_M i_T^*\tau = \chi(M)$ et c'est cette propriété qui sera utile pour étudier les champs de vecteurs.

5 Application aux champs de vecteurs

5.1 Théorème fondamental

Soit M une variété compacte, ξ un champ de vecteurs et $\pi : TM \rightarrow M$ le fibré tangent de M . On suppose de plus que pour tout x tel que $\xi(x) = 0$, si i est l'injection de M dans TM via la section nulle, $\text{Im}((\xi - i) \circ \pi)$ est un supplémentaire de $T_x M$ dans $T_{(x,0)} TM$. Ceci implique en particulier que les zéros de ξ sont isolés (par inversion locale). Si on munit M d'une orientation au voisinage de x , TM est alors orientée et ξ induit une orientation sur TM comme somme de $T_x M$ et $\text{Im}(\xi - i)$ tous deux orientés via i et ξ . Si cette orientation est conforme à celle de TM , on dit que le zéro de ξ est positif, sinon, il est dit négatif. On note ce signe $\varepsilon(x)$. Si on change l'orientation de M au voisinage de x en son opposé, $\varepsilon(x)$ ne change

pas. On n'a donc pas besoin de supposer M orientée. L'objet de ce chapitre est de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 10 – Soit M une variété compacte et ξ un champ de vecteurs comme celui décrit ci-dessus. Alors

$$\sum_{x, \xi(x)=0} \varepsilon(x) = \chi(M).$$

DÉMONSTRATION – On suppose dans un premier temps que M est plongée et orientable. Soit $t \in [0, 1]$ et $i_t : M \rightarrow TM$ définie par $i_t(x) = (x, t\xi(x))$. Alors d'après le lemme de Poincaré, $i_0^*\tau$ et $i_1^*\tau$ sont cohomologues avec $i_0 = i_T$ et $i_1 = \xi$, ce qui se traduit en terme d'intégrale par

$$\int_M \xi^*\tau = \int_M i_T^*\tau = \chi(M).$$

Or τ est à support compact, donc il existe A tel que τ s'annule à partir d'une distance A de la section nulle. Soit φ_t une fonction C^∞ définie sur \mathbb{R}^+ qui vaut tx si $x < A+1$ et dont le support est compact. Alors l'application $\Phi_t : TM \rightarrow TM$ définie par $\Phi_t(x, v) = (x, (|v| + t\varphi(|v|)) \frac{v}{|v|})$ est C^∞ et propre. De plus $\Phi_0 = Id_{TM}$ et quand $t \rightarrow \infty$, le support de $\varphi_t^*\tau$ tend vers 0. Donc τ est représenté par une forme de support aussi proche de 0 que voulu, disons à distance δ .

A ce moment là,

$$\begin{aligned} \int_M \xi^*\tau &= \int_{|\xi| \leq \delta} \xi^*\tau \\ &= \sum_{x, \xi(x)=0} \int_{U_i} \xi^*\tau \end{aligned}$$

Soit (u_1, \dots, u_n) une carte directe de M centrée en x . Alors, au voisinage de x , $(\frac{\partial \xi}{\partial u_i})$ est une base de $T_x M$ directe si $\varepsilon(x) = 1$, indirecte sinon. On peut appliquer la définition de l'intégration sur les fibres à cette carte, ce qui nous donne comme τ est la classe de Thom de T , $\int_{d\xi(U_i)} \tau = \varepsilon(x)$. Soit $F : U_i \times [0, 1] \rightarrow TM$ définie par $F(y, t) = td\xi(y) + (1-t)\xi(y)$. On peut supposer que le support de τ est assez petit pour que $F^*\tau$ soit à support compact dans $U_i \times [0, 1]$. Les formes $F(\cdot, 0)^*\tau$ et $F(\cdot, 1)^*\tau$ sont cohomologues et à support compact dans U_i ce qui justifie que les intégrales sont les mêmes si on remplace ξ par sa différentielle.

On a donc démontré que

$$\chi(M) = \int_M i_T^*\tau = \sum_{x, \xi(x)=0} \varepsilon(x).$$

□

Maintenant, si M n'est plus orientable, soit $p : \widetilde{M} \rightarrow M$ le revêtement à deux feuillets correspondant aux deux choix d'orientation de M . \widetilde{M} est orientable, et on peut appliquer le théorème précédent au champ de vecteurs $p^*\xi$ dont les zéros sont les y tels que $\xi(p(y)) = 0$, et qui ont pour signe celui de $p(y)$. La somme des signes est donc $\sum_{x, \xi(x)=0} 2\varepsilon(x) = \chi(\widetilde{M}) = 2\chi(M)$ car le revêtement a deux feuillets. On a ainsi démontré dans le cas général l'égalité

$$\chi(M) = \sum_{x, \xi(x)=0} \varepsilon(x).$$

□

5.2 Indice d'un champ de vecteurs

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n , ξ un champ de vecteurs sur U ne s'annulant qu'en x . Soit $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$. On note $\text{ind}_x \xi$ le degré de l'application $S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ qui à v associe $\frac{\xi(x + rv)}{|\xi(x + rv)|}$. C'est donc un entier qui ne dépend pas du rayon r , grâce à l'invariance du degré par homotopie.

PROPOSITION 7 – *L'indice est invariant par difféomorphisme.*

DÉMONSTRATION – Soit φ un difféomorphisme de U sur V et ξ un champ de vecteurs sur U ne s'annulant qu'en 0 (ce que l'on peut toujours supposer par translation. On suppose de plus que $\varphi(0) = 0$). Montrons que $\text{ind}_0 \xi = \text{ind}_0 \varphi_*\xi$. Soit S la sphère entourant 0 dans U . Alors par déformation, on peut calculer l'indice de $\varphi_*\xi$ sur $\varphi(S)$. Soient ψ_1 et ψ_2 les applications définies sur S et $\varphi(S)$ dont on prend le degré dans la définition. Elles sont toutes les deux à valeur dans S . Soit σ la forme volume canonique de S . Alors $\text{ind}_0 \xi = \int_S \psi_1^* \sigma$ et

$$\begin{aligned} \text{ind}_0 \varphi_*\xi &= \int_{\varphi(S)} \psi_2^* \sigma \\ &= \int_{\varphi(S)} \varphi_* \psi_1^* \sigma \\ &= \int_S \psi_1^* \sigma \text{ par la formule de changement de variables} \\ &= \text{ind}_0 \xi. \end{aligned}$$

□

Ceci nous permet de définir l'indice d'un champ de vecteurs défini sur une variété quelconque. Remarquons que le cas précédent traite des cas où $\text{ind}_x \xi = \pm 1$.

5.3 Généralisation

On peut généraliser le théorème précédent aux champs de vecteurs qui s'annulent en un nombre fini de points :

THÉORÈME 11 – Soit M une variété compacte et ξ un champ de vecteurs s'annulant en un nombre fini de points x_i , alors

$$\sum_i \text{ind}_{x_i} \xi = \chi(M).$$

DÉMONSTRATION – Comme précédemment on suppose M orientée, et on est amené à évaluer $\int_M \xi^* \tau = \chi(M)$. Donnons nous une métrique riemannienne sur M . En dehors des points x_i , on peut contrôler la norme de ξ et supposer qu'elle est inférieure à ε au voisinage des points x_i , plus grande à l'extérieur. Comme τ est à support arbitrairement petit, l'intégrale précédente se décompose en une somme d'intégrales définies sur des ouverts U_i entourant le point x_i . On peut supposer que les U_i sont des ouverts de carte. Une paramétrisation de l'espace tangent est alors $(u_1, \dots, u_n, \frac{\partial}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u_n})$. Si on appelle p la projection sur les n dernières coordonnées, un représentant de la classe de Thom est donné par $p^*(\pi^* \sigma \wedge n^* \varphi(t) dt)$ où φ est une fonction positive telle que $\int_{\mathbb{R}^+} t^{n-1} \varphi(t) dt = 1$, π est la projection radiale de \mathbb{R}^n sur S^{n-1} et n est la norme.

On peut supposer que le support de φ est aussi proche de r que l'on veut. Puis, on peut supposer que la norme de ξ est exactement $\frac{|y-x|^2}{r^2}$ pour $y \in U_i$ et $\overline{B(x_i, r)} \subset U_i$. Notons $S^i = \partial B(x_i, r)$: ξ est homotope au voisinage de S^i à la fonction $\xi|_{S^i}$ prolongée radialement qui n'est autre que $\xi \circ \pi$. L'intégrale $\int_{U_i} \xi^* \tau = \int_{U_i} \pi^* \xi^* p^* (\pi^* \sigma \wedge \varphi(t) dt) = \int_{\mathbb{R}^+} \varphi(t) dt \int_{S^i} \xi|_{S^i}^* \sigma = \text{ind}_{x_i} \xi$.

En réeffectuant la sommation, on obtient finalement la formule de l'énoncé. Si M n'est pas orientable, on considère encore son revêtement orientable à deux feuillets auquel on applique le théorème. Un zéro d'indice q a ses deux antécédents d'indice q , puis la caractéristique d'Euler du revêtement est double donc on retombe bien sur la même formule. \square

6 Applications et compléments

6.1 Existence de champ de vecteurs

On veut montrer que sur une variété compacte de caractéristique nulle, il existe un champ de vecteurs qui ne s'annule pas.

DÉMONSTRATION – Avec le chapitre sur l'application de Gauss, on a trouvé une application f_v qui pour un choix convenable de v (valeur régulière) n'avait qu'un nombre fini de points critiques. Il suffit de prendre son gradient pour obtenir un champ de vecteurs qui ne s'annule qu'en un nombre fini de points x_1, \dots, x_m . Soit Φ un difféomorphisme qui envoie tous ces points dans un même ouvert de carte, alors le champ de vecteurs induit que l'on appelle ξ ne s'annule qu'en un nombre fini de points aussi proches les uns des autres que l'on veut. Soit U

une carte contenant 0 et $r > 0$ tel que les $y_i = \Phi(x_i)$ soit inclus dans $B(r)$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que les $B(y_i, \varepsilon)$ soit disjointes et incluses dans $B(r)$. On peut supposer de plus que ξ est de norme 1 sur $B \setminus \bigcup_i B(y_i, \varepsilon)$.

Calculons le degré de l'application $\xi|_{\partial B(r)}$. Pour cela il suffit d'évaluer par la formule de Stokes

$$\begin{aligned} \int_{B \setminus \bigcup_i B(y_i, \varepsilon)} d\xi^* \sigma &= 0 \\ &= \int_{\partial B(r)} \xi^* \sigma - \sum_i \int_{\partial B(y_i, \varepsilon)} \xi^* \sigma \\ &= \int_{\partial B(r)} \xi^* \sigma = \text{deg } \xi|_{\partial B(r)}. \end{aligned}$$

Avant de conclure, on utilise un petit lemme :

PROPOSITION 8 – *L'application $\text{deg} : \pi_n(S^n)$ (classe d'homotopie différentiable) $\rightarrow \mathbb{Z}$ est un isomorphisme.*

DÉMONSTRATION – On admet toutefois que $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ dans le cas des classes d'homotopie continue. Par approximation, c'est donc la même chose en ce qui concerne les classes d'homotopie différentiables. De plus deg est un morphisme de groupes puisque le nombre d'antécédents de $f * g$ est celui de f plus celui de g si le point d'arrivée est régulier pour chacune des applications. Ensuite, deg est surjectif puisque $\text{deg}(I) = 1$. Ainsi, deg est un isomorphisme de groupes. \square

On en déduit que $\xi|_{\partial B(r)}$ est différentiablement homotope à une application constante. Notons H_t cette homotopie : $H_0 = \xi|_{\partial B(r)}$ et $H_1 = C \in S^{n-1}$. On construit alors un champ de vecteurs ξ' par $\xi'(y) = H_{|y|}(y)$ pour $|y| < r$ puis on pose $\xi' = \xi$ sur le complémentaire de $B(r)$. Le champ ainsi construit est continu et ne s'annule pas, par approximation, on peut construire un champ différentiable sur M qui ne s'annule pas. \square

6.2 Existence de structure minkovskienne

Soit M une variété. On appelle structure minkovskienne sur M la donnée en chaque point d'une forme quadratique sur l'espace tangent non dégénérée d'indice 1. Ce genre de variétés intervient en théorie de la relativité. L'objet de ce paragraphe est de démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME 12 – *Une variété compacte admet une structure minkovskienne si et seulement si sa caractéristique d'Euler est nulle.*

DÉMONSTRATION – On traite séparément les deux implications.

Supposons que M ait une structure minkovskienne q et rajoutons une structure riemannienne g . On peut écrire $q(x) = g(Sx, x)$ pour un unique endomorphisme symétrique S . S possède une et une seule valeur propre négative d'espace propre associé de dimension 1, D . Le

choix d'un vecteur unitaire sur D fournit un revêtement de M à deux feuillets sur lequel ce choix étant bien défini, il existe un champ de vecteurs qui ne s'annule pas. Ainsi, la caractéristique d'Euler du revêtement est nulle, puis celle de M aussi car c'est la moitié.

Réciproquement, si $\chi(M) = 0$, il existe un champ de vecteurs de norme 1 que l'on note ξ . Soit g une métrique riemannienne sur M , alors $q(x) = g(x, x) - 2g(\xi, x)^2$ est une métrique minkovskienne sur M . \square

6.3 Une application aux groupes de Lie

Soit G un groupe de Lie compact et connexe. On appelle tore de G tout sous-groupe de Lie (plongé) connexe et commutatif (qui est donc isomorphe à un produit de cercles), et on considère parmi ces tores ceux qui sont maximaux.

On remarque qu'un tel tore existe nécessairement : choisissons un élément $h \in \mathfrak{g}$ non nul, alors $\mathfrak{h} = \{e^{th}, t \in \mathbb{R}\}$ est un tore de G .

PROPOSITION 9 – Soit T un tore maximal, et N son normalisateur dans G . Alors

- $\text{Card}(N/T) = \chi(G/T)$
- $\chi(G/N) = 1$
- Tout autre tore maximal est conjugué à T .

DÉMONSTRATION – Premièrement, le groupe N/T est fini, car si tel n'était pas le cas, il contiendrait un sous-groupe à un paramètre. Celui-ci agirait sur T par une transformation modulaire, et par connexité, cette transformation serait triviale. Ainsi, l'adhérence du groupe engendré par T et le sous-groupe à un paramètre serait compacte, connexe, commutative, et de dimension strictement plus grande que celle de T .

Choisissons maintenant un élément $h \in \mathfrak{g}$ qui engendre T au sens précédent. On peut le faire agir sur G/T par $g \mapsto e^{th}g$. Cette action est le flot d'un champ de vecteurs sur G/T que l'on note X . Les zéros de ce champ de vecteurs correspondent aux points fixés par le flot. Mais si $[g] \in G/T$ est fixe, cela équivaut au fait que $g^{-1}e^{th}g \in T$ pour tout h , soit $g^{-1}Tg \subset T$ ou $g \in N$. Il reste à calculer l'indice de X en chacun de ces points.

Le groupe G possède un produit scalaire invariant qui en fait un espace symétrique (la multiplication à gauche est une isométrie). Le quotient G/T hérite aussi de cette structure riemannienne, et ainsi, G agit sur G/T par isométries. Si x est point fixe pour l'action de e^{th} que l'on note Φ_t , alors on regarde le degré du champ de vecteur X sur une sphère géodésique de centre x et de rayon ε assez petit. Soit $v \in T_x G/T$ de norme unité :

$$\langle d \exp_{\varepsilon v} v, X(\exp(\varepsilon v)) \rangle = \langle d\Phi_{0 \exp(\varepsilon v)} d \exp_{\varepsilon v} v, d \exp_{\varepsilon v} v \rangle$$

Comme $d\Phi_0 = \text{Id}$ si $\varepsilon = 0$, pour ε assez petit, cette quantité sera donc strictement positive, ce qui assure que l'indice de X en x est égal à 1.

Il suffit maintenant de compter les points fixes pour avoir la formule $\text{Card}(N/T) = \chi(G/T)$.

Le groupe à un paramètre engendré par h agit aussi sur G/N mais avec un seul point fixe, ce qui prouve que $\chi(G/N) = 1$. Considérons un autre tore maximal T' . Le groupe à un paramètre engendré par H agit sur G/T' et le nombre de points fixes de cette action est égale à $\chi(G/T') > 0$. Cela signifie qu'il existe un point fixe, autrement dit, $g \in G$ tel que $T.g \subset gT'$, soit $T' = g^{-1}Tg$. Ainsi, T et T' sont conjugués. \square

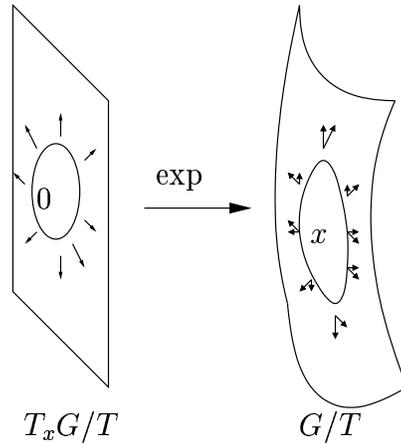


FIG. 2: Indice du champ de vecteur X

7 Une méthode plus cohomologique : la dualité de Poincaré

7.1 Dual d'une sous-variété

Soit M^m une variété orientée et L^n une sous variété orientée compacte. On munit M d'une structure riemannienne quelconque. L possède un un fibré normal dans M que l'on note N (naturellement orienté) et on peut considérer sa classe de Thom ν . L'application $N \rightarrow M$ qui à (x, v) associe $\exp_x(v)$ est un difféomorphisme sur un voisinage de la section nulle de N . En effet, ceci est vrai localement et L est compacte. Cette application Φ est une façon de réaliser un voisinage tubulaire de L dans M . Soit U un voisinage de la section nulle dans N qui est difféomorphe à son image par Φ . On peut supposer que ν a son support dans U . Ainsi, $P_L = \Phi_*\nu$ est un élément de $H^{m-n}(M)$ a support arbitrairement proche de L . Ceci est indépendant de la structure riemannienne choisie et s'appelle le dual de Poincaré de L . Cette appellation est justifiée par le fait que P_L est le dual de Poincaré de $[L]$ en cohomologie singulière qui est isomorphe à la cohomologie de Rham par l'isomorphisme de Rham. On a montré que si V est une sous-variété compacte de M de codimension n , alors $[L] \cdot [V] = \int_V P_L = \int_L P_V$.

7.2 Application à la caractéristique d'Euler

Ainsi, dans le cas précédent où $M \subset TM$ via la section nulle, $\int_M \tau = [M] \cdot [M]$. C'est cette quantité qui intervient lors du calcul de l'indice des champs de vecteurs, puisque ξ déplace l'une des deux sous-variétés pour les rendre transverses, et alors le décompte des points d'intersection (zéros de ξ) donne la quantité $[M] \cdot [M]$. Le recours à la théorie de Morse permettait de montrer que cette quantité était égale à la caractéristique d'Euler. Utilisons une autre méthode, et pour cela, plaçons nous non pas sur TM mais sur $M \times M$, ce qui ne change pas grand chose vu que tout champ de vecteurs assez petit peut être vu comme la sous variété des $(x, \exp_x \xi(x))$ que l'on note M_ξ . Le calcul $[M_o] \cdot [M_\xi] = [M_o] \cdot [M_o]$ nous donne encore la même information mais tout revient maintenant à calculer $[M_o] \cdot [M_o]$ qui n'est autre que l'auto-intersection de

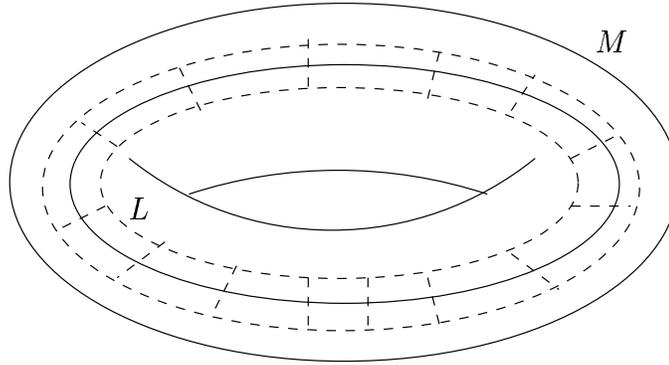


FIG. 3: Classe Poincaré-duale d'un parallèle dans le tore

la diagonale Δ dans $M \times M$. D'après ce qui précède, cette quantité est encore $\int_{\Delta} P_{\Delta}$.

Notons p et q les premières et deuxièmes projections de $M \times M \rightarrow M$. On admet ici que l'homomorphisme de Künneth $H^*(M) \otimes H^*(M) \rightarrow H^*(M \times M)$ défini par $\alpha \otimes \beta \mapsto \alpha \times \beta = p^* \alpha \wedge q^* \beta$ est un isomorphisme. On admet aussi que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle : H^p(M) \times H^{n-p}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\langle \alpha, \beta \rangle = \int_M \alpha \wedge \beta$ est une dualité parfaite pour tout p . Donnons nous une base $\{\alpha\}$ de

$H^*(M)$ constituée d'éléments homogènes. On note $\dot{\alpha}$ la base duale de α au sens où $\langle \alpha, \dot{\beta} \rangle = \delta_{\alpha\beta}$. On écrit de manière générale $P_{\Delta} = \sum_{\alpha, \beta} A_{\alpha, \beta} \alpha \times \dot{\beta}$ où les éléments α et β sont de mêmes degrés

puisque P_{Δ} est de degré n . On calcule alors de deux manières différentes $\langle P_{\Delta}, \dot{\alpha}' \times \beta' \rangle$.

La première consiste à décomposer P_{Δ} dans la base des $\alpha \times \dot{\beta}$. Le produit se décompose donc comme une somme de termes de la forme $A_{\alpha, \beta} \langle \alpha \times \dot{\beta}, \dot{\alpha}' \times \beta' \rangle = A_{\alpha, \beta} (-1)^{(n-\deg \beta)(n-\deg \alpha)} \int_{M \times M} \alpha \times \dot{\alpha}' \wedge \dot{\beta} \times \beta'$. La dernière intégrale se décompose par Fubini en un produit de deux intégrales où on reconnaît les produits de α avec $\dot{\alpha}'$ et $\dot{\beta}$ avec β' . La condition de dualité force donc le terme à être nul à moins que $\alpha = \alpha'$ et $\beta = \beta'$. Notons p le degré commun de α et β . Le signe qui intervient n'est autre que $(-1)^{(n-p)^2 + p(n-p)} = (-1)^{n(p+1)}$.

D'un autre côté, on utilise la propriété fondamentale de P_{Δ} à savoir $\langle P_{\Delta}, \dot{\alpha}' \times \beta' \rangle = \int_{\Delta} \dot{\alpha}' \times \beta' = \int_M \Delta^*(\dot{\alpha} \times \beta) = \int_M \dot{\alpha} \wedge \beta = (-1)^{p(n-p)} \delta_{\alpha, \beta}$. Ou on a posé aussi $\Delta(x) = (x, x)$: l'égalité ci-dessus est vraie car $p \circ \Delta = q \circ \Delta = \text{Id}$.

On déduit de tout cela que $A_{\alpha, \beta} = (-1)^{n-p} \delta_{\alpha, \beta}$, ou encore $P_{\Delta} = \sum_{\alpha} (-1)^{n-\deg \alpha} \alpha \times \dot{\alpha}$. Le calcul de $\int_{\Delta} P_{\Delta}$ se fait comme ci-dessus, et on trouve $\sum_{\alpha} (-1)^{n-\deg \alpha} = \chi(M)$. On obtient bien

$$[\Delta] \cdot [\Delta] = \chi(M).$$

Montrons une application de cette interprétation :

PROPOSITION 10 – Soit M^{2n} une variété orientée telle que $H^n(M) = 0$ (classiquement, \mathbb{R}^{2n} ou S^{2n}), et soit L une sous variété compacte orientée. Alors il existe un champ de vecteurs ξ sur L tel que pour tout $x \in L$, $\xi(x) \notin T_x L$.

DÉMONSTRATION – Si on munit M d'une structure riemannienne, cela revient à trouver un champ de vecteurs normal qui ne s'annule pas. D'après ce qui précède, cela revient à montrer que l'auto-intersection de L dans son fibré normal est nulle. Comme ce fibré se plonge dans M , par naturalité de la forme d'intersection, cela revient à calculer cette intersection dans M . Mais $P_L \in H^n(M)$ est nulle, donc $[L] \cdot [L] = \int_L P_L = 0$. \square

7.3 Une généralisation : la formule des traces de Lefschetz

Soit M^n une variété compacte orientée et $f : M \rightarrow M$ une application différentiable. Si on considère l'application graphe $\Gamma_f : M \rightarrow M \times M$ qui à x associe $(x, f(x))$, on peut considérer l'entier $L_f = [\Delta] \cdot [\Gamma_f]$ qui va compter algébriquement le nombre de points fixes de f . Ce nombre d'intersection est lié à l'application f^* induite en cohomologie par la formule suivante :

THÉORÈME 13 –

$$[\Delta] \cdot [\Gamma_f] = \sum_{p=0}^n (-1)^p \text{Tr}(f^* : H^p(M) \rightarrow H^p(M)).$$

DÉMONSTRATION – De la même manière, on considère P_f la classe Poincaré duale de Γ_f dans $M \times M$. Tout revient à la calculer dans la base des $\alpha \times \beta$. Pour cela on remarque que $P_f = (\text{Id} \times f)^*(P_\Delta)$: ainsi, comme $P_\Delta = \sum_{\alpha} (-1)^{n-\text{deg } \alpha} \alpha \times \dot{\alpha}$, $P_f = \sum_{\alpha} (-1)^{n-\text{deg } \alpha} \alpha \times f^* \dot{\alpha}$ puis $L_f = \sum_{\alpha} (-1)^{n-\text{deg } \alpha} \langle \alpha, f^* \dot{\alpha} \rangle = \sum_p \sum_{\alpha, \text{deg } \alpha=p} (-1)^{n-p} \text{Tr}(f^*|_{H^{n-p}(M)})$. \square

On peut encore généraliser : soit deux applications f et g différentiables de M dans M . On peut considérer $L_{f,g} = [\Gamma_f] \cdot [\Gamma_g]$ qui va compter le nombre de "coïncidences" de f avec g . On a alors $L_{f,g} = \sum_{\alpha} (-1)^{n-\text{deg } \alpha} \langle g^* \alpha, f^* \dot{\alpha} \rangle$.

7.4 Exemple

Considérons $A \in \text{SL}(n, \mathbb{Z})$ qui agit sur le tore $T^n = (S^1)^n$, et calculons son nombre de Lefschetz. La cohomologie de T^n est isomorphe en tant qu'algèbre à l'algèbre extérieure $\Lambda \mathbb{R}^n$ et l'action de A est ΛA . On a donc $L_A = \sum_{p=0}^n (-1)^p \text{Tr}(\Lambda^p A)$. Calculons ceci pour un A diagonalisable (l'expression de droite a un sens même si les coefficients de A ne sont pas entiers). $\text{Tr}(\Lambda^p A)$ est la p -ième fonction symétrique en les valeurs propres et chacun des termes intervient dans le développement du polynôme $\det(A - x\text{Id})$. Ainsi, $L_A = \det(A - \text{Id})$ pour tout A par continuité. On retrouve bien le fait que le nombre de Lefschetz compte le nombre de points fixes.

Bibliographie

Pour cet exposé, on pourra consulter [Bre], [Godb], [Hir].

Cohomologie de Čech des faisceaux

Yann Ollivier

On définit ici la cohomologie de Čech des faisceaux. Notre but est d'exposer la construction de base de Čech dans différentes situations : la définition d'objets cohomologiques globaux par recollement d'objets définis sur les intersections des ouverts d'un recouvrement d'un espace.

On commence par motiver la construction de Čech en exposant le cas simple des complexes. On utilise ensuite la cohomologie de Čech des faisceaux pour une démonstration particulièrement élégante du théorème de De Rham (isomorphisme entre la cohomologie de De Rham et celle de Čech à coefficients dans \mathbb{R} pour une variété différentiable).

Enfin, on donne une application de ces méthodes à l'étude des fibrés en droites (complexes), et on définit en particulier leur première classe de Chern. On démontre sur cette dernière une sorte de formule de Gauß-Bonnet.

Nous admettrons sans démonstration plusieurs théorèmes d'algèbre homologique portant sur la cohomologie de Čech, qui peuvent se démontrer à l'aide des techniques précédemment exposées dans le groupe de travail.

Une grande partie de l'exposé est une sélection du matériel des (longs) chapitres 0 et 1 de [GH].

1 Le départ : homologie de Čech d'un complexe

Un *complexe combinatoire* de sommets x_0, \dots, x_n est la donnée d'un ensemble S de parties de $\{x_0, \dots, x_n\}$, tel que $\forall i, \{x_i\} \in S$ et tel que si $A \in S$ et $B \subset A$, alors $B \in S$.

On peut se représenter un tel complexe dans \mathbb{R}^n en plaçant x_0 en 0, en plaçant les x_i à distance 1 sur chacun des axes de coordonnées, et en dessinant, pour tout $A \in S$ de cardinal i , un simplexe de dimension $i - 1$ entre les sommets inclus dans A . La condition dit alors que le bord d'un simplexe du complexe est dans le complexe.

L'idée est de définir l'homologie de ce complexe de manière combinatoire. Soit A un anneau, on note $\mathcal{C}_*(S, A)$ le module libre $A[S]$ qu'on munit de la différentielle

$$\partial(x_{i_0}, \dots, x_{i_k}) = \sum_{1 \leq j \leq k} (-1)^j (x_{i_0}, \dots, \widehat{x_{i_j}}, \dots, x_{i_k})$$

On a ainsi défini un module différentiel gradué. Son homologie est l'homologie de Čech du complexe combinatoire S .

On peut aussi définir la cohomologie, en notant $\mathcal{C}^*(S, A)$ le module des fonctions sur S à valeurs dans A (isomorphe au précédent... nous sommes en dimension finie), et définir la différentielle de $f \in \mathcal{C}^p(S, A)$ par $(\partial f)(\sigma) = f(\partial\sigma)$, ou encore :

$$(\partial f)(x_{i_0}, \dots, x_{i_k}) = \sum_{1 \leq j \leq k} (-1)^j f(x_{i_0}, \dots, \widehat{x_{i_j}}, \dots, x_{i_k})$$

(éventuellement avec un signe $-(-1)^k$ si l'on se préoccupe d'une belle théorie de structures multiplicatives ensuite, ce qui ne sera pas notre cas). La cohomologie de Čech de S est alors la cohomologie de ce complexe (elle est bien sûr isomorphe à l'homologie).

C'est ce point de vue combinatoire, où le bord d'un k -uplet est une somme alternée de $k - 1$ -uplets, qui définira la cohomologie de Čech des faisceaux. Un formalisme très similaire apparaît dans la définition de la cohomologie des groupes. À noter que contrairement à la théorie de l'homologie singulière, on ne manipule que des modules de dimension finie.

Telle que nous l'avons construite, l'homologie de Čech d'un complexe est identique à l'homologie d'un dessin de ce complexe dans \mathbb{R}^n (ce n'est pas immédiat).

2 Cohomologie de Čech des faisceaux

À l'origine de cette théorie, on trouve des problèmes de recollements. Si on a un recouvrement d'un espace topologique, si on a des fonctions définies sur chaque partie du recouvrement, et si ces fonctions se recollent bien sur chaque intersection de parties du recouvrement, alors on peut définir un objet global sur tout l'espace, qui sera un élément de la cohomologie de l'espace à valeurs dans notre espace de fonctions.

Par ailleurs, il peut être intéressant de regarder la cohomologie à valeurs dans un espace qui pourrait varier d'un endroit à un autre. Si on a par exemple un quotient Y d'un espace $X : \pi : X \rightarrow Y$, on peut vouloir obtenir des informations sur la cohomologie de X à partir de la cohomologie de Y et, en tout point $y \in Y$, de la cohomologie de la fibre $\pi^{-1}(y)$.

Ces considérations amènent à la définition des faisceaux, que nous rappelons.

2.1 Rappels sur les faisceaux

Faisceaux. Un *faisceau* \mathcal{F} sur un espace topologique X est la donnée, pour chaque ouvert U de X , d'un module $\mathcal{F}(U)$, dont les éléments sont appelés *sections* au-dessus de U , ainsi que d'un morphisme de restriction d'un ouvert à un autre $\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$, pour $V \subset U$. On demande les conditions suivantes pour tous ouverts U, V, W , qui expriment que ce cette restriction ressemble à ce qu'on appelle usuellement restriction :

- Si $U \supset V \supset W$, alors $\rho_{VW} \circ \rho_{UV} = \rho_{UW}$.
- Si on a deux sections sur U et V respectivement, dont les restrictions à $U \cap V$ sont égales, alors il existe une section sur $U \cup V$ qui se restreint à celles-là sur U et V .
- Si les restrictions à U et V d'une section de $U \cup V$ sont toutes deux nulles, alors cette section est nulle.

On notera indifféremment $\rho_{UV}f$ ou $f|_V$.

Par exemple, l'espace des fonctions continues sur les ouverts d'un espace topologique est un faisceau.

Un autre faisceau que nous utiliserons par la suite est celui des fonctions localement constantes à valeurs dans \mathbb{Z} ou \mathbb{R} . Étudier les conditions de recollement de fonctions localement constantes revient exactement à étudier l'homologie usuelle de l'espace (cf. ci-dessous).

Un morphisme de faisceaux $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est simplement une collection de morphismes $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ pour tout ouvert U , commutant à la restriction.

Le noyau d'un morphisme de faisceaux est un sous-faisceau du faisceau de départ, défini sur chaque ouvert comme le noyau du morphisme sur cet ouvert. C'est bien un faisceau.

Quotients de faisceaux. Pour définir un quotient de faisceaux, il n'est pas correct de prendre au-dessus de chaque ouvert le quotient correspondant : cela ne donne pas toujours un faisceau.

Par exemple, si l'on prend, sur l'espace $\mathcal{C} - \{0\}$, la fonction exponentielle $f \mapsto e^{2i\pi f}$ qui est un morphisme du faisceau des fonctions holomorphes vers celui des fonctions holomorphes ne s'annulant pas sur $\mathcal{C} - \{0\}$, on voit que la fonction z n'est pas dans l'image, tandis que sa restriction à tout ouvert de $\mathcal{C} - \{0\}$ n'entourant pas l'origine y est (on peut en prendre le logarithme), ce qui contredit la propriété de recollement des faisceaux.

On voudrait donc dire qu'une section appartient à l'image d'un morphisme de faisceaux si on peut trouver un découpage de son support en ouverts plus petits, tel que sur chacun de ces ouverts, sa restriction soit effectivement atteinte. Ceci amène la définition suivante.

Le *faisceau quotient* du faisceau \mathcal{G} par le sous-faisceau $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{G}$ est le faisceau dont une section σ au-dessus d'un ouvert U est donnée par un recouvrement ouvert (U_i) de U et une famille de sections $\sigma_i \in \mathcal{G}(U_i)$ coïncidant sur les intersections : $\sigma_i|_{U_i \cap U_j} = \sigma_j|_{U_i \cap U_j}$; deux telles sections (σ_i, U_i) et (σ'_j, U'_j) sont identifiées si leur différence est localement dans \mathcal{F} , i.e. si en tout point $x \in U_i \cap U'_j$, on peut trouver un voisinage V de x tel que $\sigma_i|_V - \sigma'_j|_V \in \mathcal{F}(V)$.

Une suite de morphismes de faisceaux

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \rightarrow 0$$

est dite exacte si φ fait de \mathcal{F} un sous-faisceau de \mathcal{G} et si $\mathcal{H} = \mathcal{G}/\mathcal{F}$ par ψ .

Une suite de faisceaux

$$\cdots \rightarrow \mathcal{F}_n \xrightarrow{\varphi_n} \mathcal{F}_{n+1} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} \mathcal{F}_{n+2} \rightarrow \cdots$$

est dite exacte si $\varphi_{n+1}\varphi_n = 0$ et si $\text{Ker}(\varphi_{n+1}) = \mathcal{F}_{n+1}/\text{Ker}(\varphi_n)$.

En conclusion, si $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ est exacte, il est faux de dire que $0 \rightarrow \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U) \rightarrow \mathcal{H}(U) \rightarrow 0$ le soit aussi pour un ouvert U : la dernière flèche n'est que localement surjective.

2.2 Définition de la cohomologie de Čech

La cohomologie de Čech à valeurs dans un faisceau représente l'obstruction au recollement de solutions locales dans le faisceau, en une solution globale. On étudie un exemple d'où sort naturellement le formalisme de Čech.

Exemple. Soit le problème de Mittag-Leffler : sur une variété complexe, trouver une fonction méromorphe ayant des pôles prescrits, et holomorphe ailleurs. Localement (dans un ouvert U_i contenant un seul pôle prescrit), le problème est trivial. Soit donc f_i une solution méromorphe au-dessus de U_i .

On veut trouver une fonction globale f telle que sur chaque U_i , $g_i = f_i - f$ soit holomorphe. Il est donc nécessaire et suffisant de trouver des g_i holomorphes et se recollant bien i.e. sur $U_i \cap U_j$, $g_i - g_j = f_j - f_i$. Si l'on introduit les $f_{ij} = (f_i - f_j)|_{U_i \cap U_j}$, le problème revient à écrire les f_{ij} définis sur chaque intersection d'ouverts, comme différence de fonctions définies sur ces ouverts. On dira alors que les f_{ij} sont un (co)bord.

Cependant, les f_{ij} ne sont pas tout à fait quelconques : ce sont des différences de fonctions (méromorphes, pas holomorphes comme on le souhaiterait) sur U_i et U_j . Elles vérifient, en particulier, la relation $f_{ij} + f_{jk} + f_{ki} = 0$. On dit qu'elles forment un (co)cycle. Au final la question est d'écrire un (co)cycle comme un (co)bord.

Cohomologie de Čech. Soit X un espace topologique muni d'un faisceau \mathcal{F} . Soit $\Omega = (U_i)$ un recouvrement ouvert de X . On définit les cochaînes de degré k à valeurs dans \mathcal{F} comme les applications qui à chaque k -uplet d'ouverts du recouvrement, associent une section sur leur intersection :

$$C^k(\Omega, \mathcal{F}) = \prod_{i_0, \dots, i_k} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k})$$

On définit l'opérateur bord $\partial\sigma \in C^{k+1}(\Omega, \mathcal{F})$ pour $\sigma \in C^k(\Omega, \mathcal{F})$ par

$$\partial\sigma(U_{i_0}, \dots, U_{i_{k+1}}) = \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \sigma(U_{i_0}, \dots, \widehat{U_{i_j}}, \dots, U_{i_{k+1}})|_{U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_{k+1}}}$$

Écrivons pour l'exercice, cette définition en degré 0 et 1 :

$$(\partial\sigma_0)(U, V) = \sigma_0(V) - \sigma_0(U)$$

et

$$(\partial\sigma_1)(U, V, W) = \sigma_1(V, W) - \sigma_1(U, W) + \sigma_1(U, V)$$

La cohomologie de Čech du faisceau \mathcal{F} pour le recouvrement Ω est la cohomologie de ce complexe :

$$H^k(U, \mathcal{F}) = \frac{\text{Ker } \partial : C^k(U, \mathcal{F}) \rightarrow C^{k+1}(U, \mathcal{F})}{\text{Im } \partial : C^{k-1}(U, \mathcal{F}) \rightarrow C^k(U, \mathcal{F})}$$

Tout ceci dépend de notre choix de recouvrement. On a évidemment une application naturelle de la cohomologie sur un recouvrement vers la cohomologie sur un recouvrement plus fin. Ceci permet de définir rondement la cohomologie de Čech de l'espace X comme la limite inductive, sur tous les recouvrements, de la cohomologie ci-dessus :

$$H^*(X, \mathcal{F}) = \varinjlim_{\Omega} H^*(\Omega, \mathcal{F})$$

2.3 Premières propriétés

D'abord, $H^0(X, \mathcal{F})$ n'est autre que l'ensemble des sections globales de X dans \mathcal{F} (ce sont des sections définies sur les ouverts qui coïncident sur leur intersection). Ceci montre que la cohomologie de Čech contient autant d'information sur le faisceau que sur l'espace sous-jacent.

La cohomologie de Čech des faisceaux est covariante en le faisceau d'arrivée : un morphisme de faisceaux définit naturellement un morphisme en cohomologie à coefficients dans ces faisceaux.

Notons que tout cocycle doit vérifier la condition d'antisymétrie

$$\sigma(U_0, \dots, U_i, U_{i+1}, \dots, U_p) = -\sigma(U_0, \dots, U_{i+1}, U_i, \dots, U_p).$$

En prenant comme faisceau les fonctions localement constantes à valeurs dans \mathbb{Z} , si sur un le dessin d'un complexe combinatoire on prend comme recouvrement ouvert les sommets, faces et arêtes un peu épaissis, on voit qu'on obtient exactement la cohomologie de Čech du complexe combinatoire. On admettra que sur toute variété, la cohomologie de Čech à coefficients dans \mathbb{Z} est isomorphe à la cohomologie singulière.

Par ailleurs, toute suite exacte de faisceaux $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ définit une suite exacte longue en cohomologie

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H^0(X, \mathcal{F}) & \rightarrow & H^0(X, \mathcal{G}) & \rightarrow & H^0(X, \mathcal{H}) \\ & & \xrightarrow{\partial} & & H^1(X, \mathcal{F}) & \rightarrow & H^1(X, \mathcal{G}) & \rightarrow & H^1(X, \mathcal{H}) \dots \\ & & & & & & \vdots & & \\ & & \xrightarrow{\partial} & & H^p(X, \mathcal{F}) & \rightarrow & H^p(X, \mathcal{G}) & \rightarrow & H^p(X, \mathcal{H}) \dots \end{array}$$

où l'application ∂ s'obtient en remarquant que si un élément de $C^p(X, \mathcal{G})$, vu dans $C^q(X, \mathcal{H})$, est de bord nul, c'est que son bord est dans $C^{p+1}(X, \mathcal{F})$. La vérification de l'exactitude est pénible à cause de la limite sur les recouvrements et de la définition locale des suites exactes de faisceaux.

Cette suite exacte permet de résoudre, au moins théoriquement, les problèmes de surjectivité globale. Si $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ est une suite exacte de faisceaux, si $x \in H^0(\mathcal{H})$ est une section globale de \mathcal{H} , x est l'image d'une section globale de \mathcal{G} si et seulement si ∂x est nul dans $H^1(\mathcal{F})$.

La vérification de la suite exacte de Mayer-Vietoris pour une partition en deux ouverts est assez simple.

Le problème du passage à la limite peut être contourné quand on connaît le théorème de Leray, qui affirme que si les ouverts U_i d'un recouvrement sont tels que $H^p(V, \mathcal{F}) = 0$ pour $p > 0$ et pour toute intersection finie V des U_i , alors la cohomologie de Čech du recouvrement est identique à la limite. Ce théorème se démontre à l'aide d'outils d'algèbre homologique n'ayant pas leur place ici (cf. [Gode]). C'est ce théorème qui rend calculables les cohomologies d'un grand nombre de faisceaux.

Enfin, mentionnons une dernière propriété : si l'on se place sur une variété M , le faisceau des fonctions C^∞ sur M admet des partitions de l'unité. On peut alors voir que sa cohomologie en degré strictement positif est nulle. En effet, soit $\Omega = (U_i)$ un recouvrement ouvert de M , soit η_i une partition de l'unité y subordonnée, et soit $\sigma \in C^p(M, \Omega)$ un cocycle. On pose

$$\tau(U_{i_0}, \dots, U_{i_{p-1}}) = \sum_j \rho_j \sigma(U_j, U_{i_0}, \dots, U_{i_{p-1}})$$

et on vérifie alors aisément, en utilisant $\partial\sigma = 0$, que $\partial\tau = \sigma$. Plus généralement, il en sera de même de tout faisceau en $C^\infty(M)$ -modules, en multipliant de la même manière par des partitions de l'unité C^∞ . En particulier, le faisceau $\Omega^p(M)$ des p -formes différentielles vérifie $H^q(M, \Omega^p(M)) = 0$ pour $q \geq 1$.

2.4 Le théorème de De Rham

Nous montrons ici que la cohomologie de De Rham d'une variété est isomorphe à sa cohomologie de Čech à coefficients dans \mathbb{R} .

L'argument, très court, utilise des suites exactes de faisceaux. En fait, il revient à faire passer, degré par degré, le côté « on intègre autour d'un trou » de la cohomologie de De Rham en un recouvrement construit autour du trou, dans l'idée combinatoire de Čech, en montrant que chaque étape est un isomorphisme.

Soit M une variété, soit Ω^p le faisceau des p -formes différentielles sur M , et soit \mathcal{Z}^p celui des p -formes fermées.

La cohomologie de De Rham en degré p est le quotient des p -formes fermées par les différentielles des $p-1$ -formes. Une p -forme est, par définition, une section globale du faisceau des p -formes (!), donc un élément de $H^0(M, \Omega^p)$ puisque le H^0 s'identifie aux sections globales. D'où :

$$H_{DR}^p(M) = \frac{H^0(M, \mathcal{Z}^p)}{d_* H^0(M, \Omega^{p-1})}$$

où d_* désigne l'application en cohomologie associée à l'application $d : \Omega^p \rightarrow \mathcal{Z}^{p+1}$.

D'après le lemme de Poincaré, toute forme fermée est localement exacte, et donc les suites de faisceaux

$$0 \rightarrow \mathcal{Z}^p \rightarrow \Omega^p \xrightarrow{d} \mathcal{Z}^{p+1} \rightarrow 0$$

sont exactes (avec par convention $\mathcal{Z}^0 = \mathbb{R}$, faisceau des fonctions localement constantes, et Ω^0 le faisceau des fonctions C^∞).

Écrivons donc partiellement les suites exactes longues en cohomologie associées à ces suites exactes de faisceaux :

$$H^q(M, \Omega^p) \xrightarrow{d_*} H^q(M, \mathcal{Z}^{p+1}) \xrightarrow{\partial} H^{q+1}(M, \mathcal{Z}^p) \rightarrow H^{q+1}(M, \Omega^p)$$

où (ne pas confondre) d_* est la différentielle extérieure et ∂ l'opérateur bord de la longue suite exacte.

Or le faisceau Ω^p admet des partitions de l'unité, donc $H^q(M, \Omega^p) = 0$ pour $q \geq 1$ et par conséquent

$$H^q(M, \mathcal{Z}^{p+1}) = H^{q+1}(M, \mathcal{Z}^p)$$

Pour $q = 0$, on obtient

$$H^0(M, \Omega^p) \xrightarrow{d^*} H^0(M, \mathcal{Z}^{p+1}) \xrightarrow{\partial} H^1(M, \mathcal{Z}^p) \rightarrow 0$$

d'où

$$H^1(M, \mathcal{Z}^p) = \frac{H^0(M, \mathcal{Z}^{p+1})}{d^*H^0(M, \Omega^p)}$$

On a donc

$$\begin{aligned} H_{DR}^p(M) &= \frac{H^0(M, \mathcal{Z}^p)}{d^*H^0(M, \Omega^{p-1})} \\ &= H^1(M, \mathcal{Z}^{p-1}) \\ &\vdots \\ &= H^{p-1}(M, \mathcal{Z}^1) \\ &= H^p(M, \mathcal{Z}^0) = H^p(M, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

3 Première classe de Chern

On s'intéresse désormais à des fibrés en droites réelles ou complexes, et on montre comment la cohomologie de Čech contribue à leur classification. En particulier, on définira la première classe de Chern d'un fibré en droites complexes et on démontrera qu'elle s'identifie à la forme de courbure de ce fibré, ce qui constitue une sorte de formule de Gauß-Bonnet.

3.1 Fibrés en droites réelles

(Les variétés ainsi que toutes les applications mentionnées dans ce paragraphe sont C^∞).

Le point de départ est l'intuition que la seule non-trivialité qui puisse arriver à un fibré en droites réelles est de faire un tour sur lui-même quand on suit un lacet non trivial dans la variété de base. On voudrait donc dire que l'ensemble des fibrés en droites sur une variété M ressemble à $H^1(M, \mathbb{Z})$ ou $H^1(M, \mathbb{R})$

Ceci n'est pas tout à fait vrai. Si par exemple sur le cercle, on prend une droite qui fait deux tours sur elle-même, le fibré obtenu est isomorphe au fibré trivial. Deux tours semblent donc ne compter pour rien. Notre nouvelle conjecture est donc que l'ensemble des fibrés en droite s'identifie à $H^1(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Un petit détour par \mathbb{RP}^2 , qui est l'exemple le plus simple où on voit bien apparaître les coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, semble montrer que cette conjecture tient la route : il existe un fibré en droites qui fait exactement un tour sur lui-même lorsqu'on parcourt une droite de \mathbb{RP}^2 de

$-\infty$ à $+\infty$ (par exemple, si la droite est horizontale, prendre le fibré engendré par la direction verticale en chaque point). Nous allons montrer qu'en effet, cette conjecture est exacte.

Un fibré vectoriel sur une variété M est la donnée d'une variété E , d'une projection $\pi : E \rightarrow M$ telle que $\forall x \in M$, $\pi^{-1}(x)$ est muni d'une structure d'espace vectoriel isomorphe à un espace vectoriel F , et d'un recouvrement ouvert (U_i) de M avec des cartes $\psi_i : U_i \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ telles que d'une part, $\pi \circ \psi_i(x, f) = (x, 0)$, et d'autre part sur $U_i \cap U_j$, $\psi_j^{-1} \circ \psi_i(x, f) = (x, g_x(f))$ où $g_x \in GL(F)$.

On demande donc que localement le fibré soit simplement un produit de la variété par un espace vectoriel, et que ces produits locaux se recollent globalement, ce qui est dans l'esprit même de la cohomologie de Čech.

On prend désormais $F = \mathbb{R}$ car, pour pousser l'analogie, il est beaucoup plus commode que $GL(F)$ soit commutatif.

Plus précisément, donc, si on a un fibré en droites réelles, si $x \in U_i \cap U_j$ appelons $g_{ij}(x)$ l'élément $g_x \in GL(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$ précédemment défini. Alors g est simplement une cochaîne de Čech de degré 1 (définie sur les intersections d'ouverts du recouvrement) à valeurs dans le faisceau (multiplicatif) des fonctions C^∞ de M dans \mathbb{R}^* .

Et même, sur les intersections de trois ouverts $U_i \cap U_j \cap U_k$, on a bien sûr $g_{ki}g_{jk}g_{ij} = \psi_i^{-1} \circ \psi_k \circ \psi_k^{-1} \circ \psi_j \circ \psi_j^{-1} \circ \psi_i = 1$. Cela signifie que les g_{ij} forment un cocycle de Čech.

Inversement, étant données des fonctions g_{ij} de chaque $U_i \cap U_j$ dans \mathbb{R}^* vérifiant ces conditions, on peut construire un fibré en prenant d'abord l'union disjointe des $U_i \times \mathbb{R}$, puis en identifiant les points au-dessus de $U_i \cap U_j$ selon les g_{ij} . La relation de cocycle dit alors exactement que cette identification est une relation d'équivalence.

Montrons que le fibré défini par un cocycle ne dépend que de sa classe d'homologie. Si $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^*$ est une 0-chaîne, ajouter son bord à une 1-chaîne g_{ij} la transforme en $g'_{ij} = \frac{f_j}{f_i} g_{ij}$. Le fibré défini par cette nouvelle 2-chaîne est isomorphe à celui de départ : on a seulement changé chaque carte $U_i \times \mathbb{R}$ en $U_i \times \mathbb{R}$ par multiplication par f_i . Inversement, toute autre trivialisations du même fibré est obtenue par application, pour chaque $x \in M$, d'un élément $f(x)$ de $GL(\mathbb{R})$, et la restriction à chaque U_i de f définit une 0-chaîne dont on devra ajouter le bord aux g_{ij} pour obtenir la nouvelle trivialisations.

Ainsi, l'ensemble des fibrés en droites sur M s'identifie à $H^1(M, \mathcal{F})$ où \mathcal{F} est le faisceau multiplicatif des fonctions C^∞ réelles ne s'annulant pas sur M . La structure algébrique est préservée : le produit tensoriel des fibrés en droites est la somme (plutôt multiplication) dans le H^1 , le fibré dual est l'opposé (l'inverse).

Maintenant, on a envie de dire qu'une fonction à valeurs dans \mathbb{R}^* est, en cohomologie, la même chose qu'une fonction à valeurs dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Pour cela, il suffit de considérer le faisceau \mathcal{G} des fonctions réelles sur M , et de constater que la suite de faisceaux

$$0 \rightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{\exp} \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

est exacte. Ensuite, comme \mathcal{G} est un faisceau admettant des partitions de l'unité, sa cohomologie en degré strictement positif est nulle ; alors la suite exacte longue en cohomologie fournit un isomorphisme entre $H^1(M, \mathcal{F})$ et $H^1(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

On a donc démontré que l'ensemble des fibrés en droites réelles sur une variété M s'identifie à $H^1(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. On va s'attaquer aux fibrés complexes. La situation sera plus compliquée, et

ce sont en fait des éléments du H^2 (les premières classes de Chern) qui vont naturellement intervenir.

3.2 Rappels sur les variétés complexes

Variétés complexes. Les variétés complexes sont définies de la même manière que les variétés réelles, en demandant que localement, on ait une identification à des ouverts de C^n , et que les changements de carte soient *holomorphes*. En chaque point on peut définir des coordonnées locales z_i et \bar{z}_i , et le fibré tangent complexe est $\mathcal{C} \left[\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} \right]$.

On notera T le fibré tangent (ou TM en cas d'ambiguïté), et T' et T'' les parties holomorphe et antiholomorphe de ce fibré, localement engendrées par les $\frac{\partial}{\partial z_i}$ et les $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}$ respectivement. La décomposition $T = T' \oplus T''$ est stable par les applications holomorphes entre variétés (c'est une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application entre variétés complexes soit holomorphe).

On notera également $T^* = T^{*'} \oplus T^{*''}$ le fibré cotangent et sa décomposition en parties holomorphe et antiholomorphe.

Une forme différentielle de degré p est une section globale C^∞ du fibré $\bigwedge^p T^*$. Les formes différentielles sont localement des produits extérieurs de dz_i et $d\bar{z}_j$, multipliées par des coefficients C^∞ . On notera $A^p = \Gamma(\bigwedge^p T^*)$. On notera aussi $A^{p,q} = \Gamma(\bigwedge^p T^{*'} \wedge \bigwedge^q T^{*''})$ les formes s'écrivant localement comme produit extérieur de p formes holomorphes et de q formes antiholomorphes de degré 1.

La différentielle extérieure est localement définie par $d = \partial + \bar{\partial}$ où (I et J sont des multi-indices) :

$$\partial(\varphi dz_I \wedge d\bar{z}_J) = \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} dz_i \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

et

$$\bar{\partial}(\varphi dz_I \wedge d\bar{z}_J) = \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_i} dz_i \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

φ étant une fonction C^∞ .

Fibrés hermitiens. Un fibré hermitien est un fibré complexe dont chaque fibre est munie d'un produit scalaire hermitien. En d'autres termes, si E est un fibré complexe de base M , une structure hermitienne est un élément de $\Gamma(E^* \otimes E^*)$ hermitien dans chaque fibre, où E^* désigne le fibré dual de E .

On notera $A^p(E)$ les p -formes différentielles sur la base M à valeurs dans le fibré E , autrement dit, les sections du fibré $(\bigwedge^p T^* M) \otimes E$. Il convient toujours de ne pas confondre $A^p(M)$ et $A^p(E)$.

Il est à noter que sur un fibré hermitien, l'opérateur $\bar{\partial}$ est canoniquement défini (mais par ∂) : pour cela, constatons que les éléments de $A^p(E)$ s'écrivent localement comme combinaison

linéaire d'éléments de la forme $\omega \otimes e$ où ω est un élément de $A^p(M)$ et e une section *holomorphe* de E ; déclarons que l'opérateur $\bar{\partial}$ appliqué à une section holomorphe donne 0 et posons donc $\bar{\partial}(\omega \otimes e) = (\bar{\partial}\omega) \otimes e$.

Connexions. Une connexion sur un fibré est une manière de comparer des fibres voisines (ce qu'on ne peut faire canoniquement), ou encore une manière de dériver des sections du fibré par rapport à un vecteur de la base : a priori, on voudrait pour dériver former la différence des valeurs de la section en des points de fibres infiniment voisines, mais cela ne peut pas se faire canoniquement.

Précisément, une connexion est une application $D : \Gamma(E) \rightarrow A^1(E)$ satisfaisant la règle de Leibnitz : pour toute fonction C^∞ sur M et pour toute section $e \in \Gamma(E)$,

$$D(f.e) = df \otimes e + f.De \in A^1(E)$$

Alors, si v est un vecteur tangent de la base au point $x \in M$, la dérivée de la section e dans la direction v est $(De)(v)$ qui est un élément de la fibre en x .

Une connexion définit aussi une notion de transport parallèle d'un vecteur de la fibre le long d'une courbe de la base : on dit que le vecteur est transporté parallèlement à lui-même si sa dérivée par rapport au vecteur tangent à la courbe est nulle.

Une fois donnée une connexion sur E , on peut étendre cette dérivation aux p -formes à valeurs dans E en posant par définition la règle de Leibnitz : pour $\psi \in A^p(M)$ et $e \in \Gamma(E)$, on définit la dérivée de $\psi \otimes e$ par

$$D(\psi \otimes e) = d\psi \otimes e + (-1)^p \psi \wedge De \in A^{p+1}(E)$$

Courbure. Soit un fibré hermitien E de base M , muni d'une connexion D . On notera $\langle \rangle$ le produit hermitien sur les fibres. On dit que la connexion est compatible avec la structure hermitienne si pour toutes sections $e, e' \in \Gamma(E)$, on a

$$d\langle e, f \rangle = \langle De, f \rangle + \langle e, Df \rangle \in A^1(M)$$

(en particulier, la norme et les angles entre vecteurs sont conservés lors du transport parallèle).

En utilisant la décomposition en parties holomorphe et antiholomorphe $A^1(E) = A^{1,0}(E) \oplus A^{0,1}(E)$, on peut définir les parties holomorphe D' et antiholomorphe D'' de D . On dit que D est compatible avec la structure complexe si $D'' : A^0(E) \rightarrow A^{0,1}(E)$ est égal à l'opérateur $\bar{\partial}$ défini ci-dessus.

Un fibré hermitien peut être canoniquement muni d'une connexion. En effet, un lemme classique (cf. [GH]) affirme que sur un fibré hermitien, il existe une unique connexion compatible avec la structure complexe et avec la structure hermitienne. Ce sera toujours celle-là que nous considérerons par la suite.

Pour définir la courbure, on commence par regarder la composée de la connexion $D : \Gamma(E) \rightarrow A^1(E)$ et $D : A^1(E) \rightarrow A^2(E)$ qui à toute section $e \in \Gamma(E)$ associe D^2e , qui est une 2-forme sur M à valeurs dans E .

D^2e appliqué à un couple de vecteurs u, v tangents à la base, s'interprète (au signe près) comme la variation du vecteur e de la fibre lorsqu'on le transporte parallèlement le long du

vecteur u , puis de v , puis de $-u$, puis de $-v$. Sur une surface courbée dans l'espace, on voit que si on prend un vecteur (par exemple un vecteur tangent) et qu'on le transporte parallèlement à lui-même suivant une boucle de la surface (« parallèlement » dans la surface et non dans l'espace ambiant), on ne va pas revenir sur le même vecteur. La courbure décrit ce phénomène.

Par un petit miracle, en chaque point, la valeur de D^2e ne dépend que de la valeur de la section e en ce point, et pas des valeurs voisines. En effet, D^2 est C^∞ -linéaire : si $f \in C^\infty(M)$ et $e \in \Gamma(E)$, on a

$$\begin{aligned} D^2(f.e) &= D(df \otimes e + f.De) \\ &= (d^2f \otimes e - df \wedge De) + (df \wedge De + f.D^2e) \\ &= f.D^2e \end{aligned}$$

Par conséquent, si deux sections e et e' ont même valeur en un point, D^2e et D^2e' ont la même valeur. Autrement dit, l'application $D^2 : \Gamma(E) \rightarrow A^2(E) = \Gamma(\wedge^2 T^*M \otimes E)$ provient d'une application du fibré E dans le fibré $\wedge^2 T^*M \otimes E$ définie au-dessus de chaque point de la base. Formulé encore autrement, D^2 définit une section globale Θ du fibré $\wedge^2 T^*M \otimes E \otimes E^*$.

La forme Θ est appelée la forme de courbure du fibré. Elle associe à tout couple de vecteurs tangents à la base au point x une application linéaire de la fibre en x dans elle-même.

Si l'on travaille en coordonnées : on peut prendre des sections e_1, \dots, e_k formant une base orthonormée au voisinage d'un point. Alors la connection D définit des coefficients $\Gamma_{ij} \in A^1(M)$ par

$$De_i = \sum_j \Gamma_{ij} \otimes e_j \in A^1(E)$$

mais les Γ_{ij} dépendent de l'ensemble des sections orthonormées choisies et non seulement de leur valeur en un point.

Un calcul direct montre alors que

$$\Theta e_i = \sum_j \left(d\Gamma_{ij} - \sum_k \Gamma_{ik} \wedge \Gamma_{kj} \right) \otimes e_j \in A^2(E)$$

autrement dit la matrice (dont les entrées sont des 2-formes sur M) de Θ dans cette base s'écrit comme la différentielle de la matrice (de 1-formes) Γ_{ij} , moins le produit extérieur (formel) de cette matrice avec elle-même.

3.3 Fibrés en droites complexes et leur première classe de Chern

Soit M une variété complexe. On désignera par \mathcal{O} le faisceau des fonctions holomorphes et par \mathcal{O}^* celui (multiplicatif) des fonctions holomorphes ne s'annulant pas sur M . On rappelle qu'on exige d'un fibré complexe que ses changements de carte soient holomorphes.

Exactement pour la même raison que pour les fibrés en droites réels, l'ensemble des fibrés en droites complexes sur M s'identifie à $H^1(M, \mathcal{O}^*)$. Cette identification respecte les fibrés duals et le produit tensoriel.

On a une suite exacte de faisceaux

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \rightarrow 0$$

où \exp représente $z \mapsto e^{2i\pi z}$.

Cette suite exacte de faisceaux donne en cohomologie un opérateur bord

$$\partial : H^1(M, \mathcal{O}^*) \rightarrow H^2(M, \mathbb{Z})$$

Si $E \in H^1(M, \mathcal{O}^*)$ est un fibré, sa première classe de Chern est définie comme $c_1(E) = \partial E$.

Prenons un exemple. Plaçons-nous sur la sphère de Riemann $\mathcal{C} \cup \{\infty\}$ et considérons un recouvrement à deux ouverts, l'un étant le disque de rayon 1 dans \mathcal{C} un peu élargi, l'autre son complémentaire un peu élargi. L'intersection est un anneau. Prenons deux trivialisations, et prenons z comme fonction de transition entre ces trivialisations. On voit bien ce qui se passe : en recollant les deux trivialisations, on fait faire un tour au fibré quand on tourne autour de l'origine. La classe de Chern de ce fibré est 1 dans $H^2(\mathcal{C} \cup \{\infty\}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. La classe de Chern compte combien de tours le fibré fait autour de chaque 2-cavité de M .

On a évidemment $c_1(E \otimes E') = c_1(E) + c_1(E')$ et $c_1(E^*) = -c_1(E)$.

En outre, on peut montrer qu'un fibré en droites complexes est déterminé, à isomorphisme C^∞ (mais non holomorphe), par sa classe de Chern.

3.4 Courbure et première classe de Chern

Soit E un fibré en droites sur une variété M , muni d'une connexion quelconque. Soit Θ sa courbure. Θ est une section du fibré $\bigwedge^2 T^*M \otimes E \otimes E^*$, or comme le fibré est de dimension 1, $E \otimes E^*$ est (canoniquement !) isomorphe à \mathcal{C} .

Θ est donc simplement une 2-forme différentielle sur M .

On a vu que localement, Θ s'écrivait sous la forme $\Theta = d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma$ où Γ est une (matrice 1×1 dont l'entrée est une) 1-forme. On a $\Gamma \wedge \Gamma = 0$ et donc $\Theta = d\Gamma$, autrement dit, Θ est localement exacte, donc fermée.

La forme de courbure d'un fibré en droites complexes est ainsi une 2-forme fermée sur la base. On peut donc considérer sa classe en cohomologie de De Rham $[\Theta] \in H_{DR}^2(M)$.

Par ailleurs, la classe de Chern du fibré, $c_1(E) \in H^2(M, \mathbb{Z})$, peut être vue comme un élément de $H^2(M, \mathbb{R})$, qui s'identifie à $H_{DR}^2(M)$ d'après le théorème de De Rham démontré ci-dessus.

Théorème – Ces deux classes de cohomologie peuvent être comparées :

$$c_1(E) = \frac{i}{2\pi} \Theta \in H_{DR}^2(M)$$

Ce théorème est évidemment à rapprocher de celui de Gauß-Bonnet.

Démonstration. Calculons d'abord la classe de Chern. Soit (U_i) un recouvrement ouvert de M donnant une trivialisaton de E , assez fin pour que les intersections $U_i \cap U_j$ soient simplement connexes. Soient g_{ij} les fonctions de transition entre ouverts.

Maintenant, reprenons la définition de la classe de Chern en cohomologie :

$$c_1 = \partial : H^1(M, \mathcal{O}^*) \rightarrow H^2(M, \mathbb{Z})$$

provenant de la suite exacte cohomologique longue issue de

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \rightarrow 0$$

Le bord du cocycle (g_{ij}) est nul, on veut prendre, par logarithme, son bord dans $C^2(M, \mathbb{Z})$, qui provient des différentes déterminations du logarithme. C'est le cocycle

$$z_{ijk} = \frac{1}{2i\pi} (\log g_{jk} - \log g_{ik} + \log g_{ij})$$

(les ouverts étant simplement connexes, on peut sur chacun trouver une détermination du logarithme complexe).

Travaillons maintenant sur la connexion. Prenons sur l'ouvert U_i la section donnée par $1 \in \mathcal{C}$ dans la trivialisaton, que nous notons e_i . Sur $U_i \cap U_j$, on a par définition $e_i = g_{ij} e_j$.

La connexion est localement donnée par une 1-forme $\Gamma_i \in A^1(M)$ telle que $De_i = \Gamma_i \otimes e_i$ (nous sommes en dimension 1...). Sur $U_i \cap U_j$, on a

$$\begin{aligned} \Gamma_i \otimes e_i &= De_i = D(g_{ij} e_j) \\ &= dg_{ij} \otimes e_j + g_{ij} De_j \\ &= \frac{dg_{ij}}{g_{ij}} \otimes e_i + g_{ij} \Gamma_j \otimes e_j \\ &= d \log g_{ij} \otimes e_i + \Gamma_j \otimes e_i \end{aligned}$$

On a donc la loi de transformation des Γ_i , ou encore le bord de la 0-chaîne (Γ_i) :

$$\Gamma_i - \Gamma_j = d \log g_{ij}$$

La forme de courbure est alors $\Theta = d\Gamma_i = d\Gamma_j$, globalement définie.

On a ainsi des formes plus ou moins explicites, d'une part, pour la classe de Chern, donnée par le 2-cocycle $z_{ijk} = \frac{1}{2i\pi} (\log g_{jk} - \log g_{ik} + \log g_{ij})$, et d'autre part pour la courbure Θ donnée comme une 2-forme différentielle $\Theta = d\Gamma_i$ avec $\Gamma_i - \Gamma_j = d \log g_{ij}$. Pour obtenir l'égalité, il faut désormais expliciter l'isomorphisme de De Rham démontré plus haut. Nous allons donc partir de la 2-forme Θ .

Une première partie de l'isomorphisme provenait de la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{Z}^1 \hookrightarrow \Omega^1 \xrightarrow{d} \mathcal{Z}^2 \rightarrow 0$$

issue du lemme de Poincaré. L'opérateur bord de la longue suite exacte correspondante en cohomologie, associée à une section de \mathcal{Z}^2 , autrement dit une 2-forme fermée (par exemple $\Theta \dots$), un élément de $H^1(\mathcal{Z})$:

$$H^0(\mathcal{Z}^2) \xrightarrow{\partial} H^1(\mathcal{Z}^1)$$

qui est obtenu de la manière suivante : par lemme de Poincaré, écrire Θ localement, sur chaque ouvert, comme la différentielle d'une 1-forme ; prendre le bord de cette 0-chaîne de 1-formes, c'est l'opérateur bord cherché. Notre écriture locale de Θ comme différentielle est toute trouvée : on a $\Theta = d\Gamma_i$ sur U_i . Le bord de cette 0-chaîne de 1-formes est bien sûr la 1-chaîne $(\Gamma_j - \Gamma_i) \in H^1(\mathcal{Z}^1)$, autrement dit $-d \log g_{ij}$.

L'autre partie de l'isomorphisme provenait de la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \hookrightarrow \Omega^0 \xrightarrow{d} \mathcal{Z}^1 \rightarrow 0$$

(Ω^0 est le faisceau des 0-formes, autrement dit des fonctions C^∞), qui fournit elle aussi un opérateur bord $H^1(\mathcal{Z}^1) \rightarrow H^2(\mathbb{R})$, obtenu en écrivant une 1-chaîne de 1-formes, localement, comme une 1-chaîne de différentielles de fonctions, et en prenant le bord de cette 1-chaîne. Là encore, notre 1-chaîne $(\Gamma_j - \Gamma_i) \in H^1(\mathcal{Z}^1)$ est toute écrite comme différentielle locale de fonctions puisque $\Gamma_j - \Gamma_i = -d \log g_{ij}$. On doit donc prendre le bord de la 1-chaîne de fonctions $-\log g_{ij}$, ce qui donne, bien entendu, $-\log g_{jk} + \log g_{ik} - \log g_{ij}$, ce qui démontre le théorème.

Bibliographie

Pour cet exposé, on pourra consulter [GH], [Gode].

Cohomologie des groupes

Gaëtan Chenevier

(Aimablement retranscrit par Jérôme Plût.)

Après avoir rappelé le peu de théorie nécessaire, on donne différentes applications de la cohomologie des groupes : classification des extensions de groupes, groupe de Brauer et théorie de Galois.

1 Extensions dans le cas abélien

1.1 Cohomologie des groupes, définition rapide

(Voir l'exposé de Jérôme Plût pour plus de détails.)

Soit G un groupe, M un groupe abélien, $G \rightarrow \text{Aut}(M)$ une représentation de G (autrement dit M est un $\mathbb{Z}G$ -module). On note $C^n(G, M)$ l'ensemble des applications de G^n vers M , et ∂^n l'application de $C^n(G, M)$ vers $C^{n+1}(G, M)$ définie par

$$\begin{aligned} \partial^n(f) = (g_1, \dots, g_{n+1}) \mapsto & g_1 \cdot f(g_2, \dots, g_n) \\ & + \sum_{i=1}^n (-1)^i f(g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_{n+1}) \\ & + (-1)^{n+1} f(g_1, \dots, g_n). \end{aligned}$$

On vérifie que $\partial^{n+1}\partial^n = 0$; on a donc un complexe $C^0(M) \xrightarrow{\partial^0} C^1(M) \rightarrow \dots$. On appelle *cohomologie de G à coefficients dans M* la cohomologie de ce complexe; c'est la seule définition que l'on utilisera dans cet exposé. On a en particulier :

$$\begin{aligned} H^0(G, M) &= M^G = \{m \in M, (\forall g \in G) g \cdot m - m = 0\}, \\ H^1(G, M) &= \frac{\{f : G \rightarrow M, f(gg') = gf(g') + f(g)\}}{\{f : G \rightarrow M, g \mapsto g \cdot m - m, m \in M\}}, \\ H^2(G, M) &= \frac{\{f : G^2 \rightarrow M, gf(g', g'') - f(gg', g'') + f(g, g'g'') - f(g, g') = 0\}}{\{f : G^2 \rightarrow M, (g, g') \mapsto g\varepsilon(g') - \varepsilon(gg') + \varepsilon(g), \varepsilon : G \rightarrow M\}}. \end{aligned}$$

On n'utilisera de la théorie cohomologique que le résultat suivant, démontré dans l'exposé de Jérôme Plût :

PROPOSITION – Si G est un groupe cyclique, alors

$$H^2(G, M) = M^G / TM, \quad \text{où } T = \sum_{g \in G} g.$$

Soient N et K deux groupes ; on cherche à classifier les extensions de K par N , c'est-à-dire tous les groupes G dont N est un sous-groupe distingué et tels que $G/N = K$, c'est-à-dire toutes les suites exactes

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow G \longrightarrow K \longrightarrow 1.$$

On dit que deux extensions G et G' sont *équivalentes* s'il existe un isomorphisme $\theta : G \rightarrow G'$ induisant l'identité sur N et sur K :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & G & \longrightarrow & K \longrightarrow 1 \\ & & & \searrow & \downarrow \theta & \nearrow & \\ & & & & G' & & \end{array}$$

Remarques : Ceci s'insère dans la stratégie de "dévissage" pour la classification des groupes finis (ou de Lie, ou algébriques etc..). Il y a deux étapes : d'abord classifier les groupes simples puis classifier les extensions de deux groupes quelconques. Ceci fait, si un groupe donné est simple c'est fini, sinon il s'écrit comme une extension de deux groupes plus petits (supposés classifiés) et c'est encore fini. Nous étudions ici la seconde étape.

La notion d'isomorphisme introduite plus haut est plus forte la notion évidente (qui serait simplement $G \simeq G'$), puisqu'elle réclame que l'isomorphisme induise l'identité sur N et G/N . C'est cependant l'ensemble des classes d'isomorphismes pour cette notion qui a une structure intéressante. Notons qu'il est très difficile en général de savoir si deux groupes obtenus par extensions (par des groupes éventuellement complètement différents) sont isomorphes, et ce même pour des produits semi-directs.

1.2 Classification

On suppose pour le moment N abélien. Soit G une extension de K par N ; alors G agit par conjugaison sur N , et, N étant abélien, son action sur lui-même par conjugaison est triviale ; l'action de G se factorise donc par K , d'où une action de K sur N . Réciproquement, si l'on se donne une action de K sur N , on peut construire le produit semi-direct $N \rtimes K$: c'est une extension de K par N , et l'action de K sur N par conjugaison est bien celle que l'on s'était donnée au départ.

On s'intéresse maintenant à la classification des extensions de K par N lorsque l'action $\psi : K \rightarrow \text{Aut } N$ est fixée. Soit

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow G \xrightarrow{\pi} K \longrightarrow 1$$

une telle extension ; π admet une section (ensembliste) s . s n'est en général pas un morphisme de groupes ; c'est en fait le cas si, et seulement si, G est le produit semi-direct de K par N . On va mesurer la différence entre s et un morphisme de groupes : si k et k' sont deux éléments de K , alors, puisque π est un morphisme de groupes et que $\pi \circ s = \text{id}_K$, il vient :

$$s(kk') = f(k, k') s(k) s(k'), \quad f(k, k') \in N.$$

L'application $f : K^2 \rightarrow N$ ainsi définie dépend bien sûr de la section ensembliste s choisie. On vérifie que f appartient à $Z^2(G, M)$: on peut en effet écrire $s(kk'k'')$ de deux manières différentes :

$$\begin{aligned} s(kk'k'') &= f(kk', k'') s(kk') s(k'') \\ &= f(kk', k'') f(k, k') s(k) s(k') s(k'') \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} s(kk'k'') &= f(k, k'k'') s(k) s(k'k'') \\ &= f(k, k'k'') s(k) f(k', k'') s(k') s(k'') \end{aligned}$$

Or, par définition de l'action de K sur N , on a :

$$s(k) f(k', k'') = k \cdot f(k', k'') s(k) ;$$

en appliquant ceci à l'expression précédente, on vérifie que f est bien un 2-cocycle sur G à coefficients dans M .

Soit à présent \tilde{s} une autre section de π : on peut alors écrire, pour tout $k \in K$,

$$\tilde{s}(k) = \varepsilon(k) s(k), \quad \varepsilon(k) \in N.$$

On vérifie alors que le cocycle défini par \tilde{s} via la construction précédente n'est autre que $\tilde{s} = f \partial \varepsilon$; la classe dans $H^2(G, M)$ de f ne dépend donc pas de la section s choisie.

Réciproquement : soit f un élément de $Z^2(K, N)$; on note alors $N \rtimes_f K$ le groupe obtenu en munissant l'ensemble $N \times K$ de la loi de multiplication

$$(n, k)(n', k') = (n + kn' + f(k, k'), kk').$$

Si $f \partial \varepsilon$ est un élément cohomologue à f , alors les extensions $N \rtimes_f K$ et $N \rtimes_{f \partial \varepsilon} K$ sont équivalentes.

On en déduit :

THÉORÈME – *L'ensemble des classes d'équivalence d'extensions de K par N (avec action fixée de K sur N) est en bijection avec $H^2(K, N)$, le produit semi-direct étant ainsi associé à l'élément nul.*

1.3 Application : le théorème de Schur-Zassenhaus

LEMME – Soit G un groupe fini; alors, pour i non nul, $H^i(G, M)$ est tué par le cardinal de G .

On ne présente ici la preuve que dans le cas $i = 2$; la preuve pour i quelconque est semblable, mais les calculs sont moins agréables. Soit donc $f \in Z^2(G, M)$; on veut montrer que $|G|f \in B^2(G, M)$. On a, pour tous $g, g', g'' \in G$:

$$gf(g', g'') - f(gg', g'') + f(g, g'g'') - f(g, g') = 0 ;$$

en sommant ceci sur g' et en posant $F(g) = \sum_{h \in G} f(g, h)$, il vient :

$$gF(g') - F(gg') + F(g) - |G|f(g, g') = 0,$$

soit encore

$$|G|f = \partial F.$$

THÉORÈME (SCHUR-ZASSENHAUS) – Toute extension de groupes finis d'ordres premiers entre eux se scinde : autrement dit, si G est un groupe fini, N un sous-groupe distingué de G , K le quotient G/N , et si K et N sont d'ordres premiers entre eux, alors G est produit semi-direct de K et N .

Quand N est abélien, $H^2(K, N)$ est tué par $|K|$ et par $|N|$, qui sont premiers entre eux, et donc trivial (quelle que soit l'action de K sur N). Ceci suffit pour établir le cas général, comme suit.

Si N est un p -groupe, on peut encore le démontrer par récurrence : le centre Z de N est distingué et non trivial dans G , et, par hypothèse de récurrence, N/Z a un complément K dans G/Z ; alors $G = KZN$, mais, d'après le cas abélien, Z a un complément H dans KZ . On a donc $G = HN$ avec $H \cap N = 1$ d'où $G = H \rtimes N$, ce qui conclut.

Dans le cas général, soient P un p -Sylow non trivial de N , $N_G(P)$ son normalisateur dans G ; alors P est un p -Sylow de $N_G(P)$, et il admet donc un complément H , d'ordre premier à p . Or par l'argument de Frattini $G = NN_G(P) = NH$. Or $N \cap H$ est un sous-groupe distingué de H ; il a donc, par hypothèse de récurrence, un complément K , soit : $H = (N \cap H)K$, et finalement $G = N \rtimes K$.

EXERCICE – Soit H un sous-groupe fini d'ordre premier à p de $GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, montrer qu'il se relève en un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})$ pour tout m , puis à $GL_n(\mathbb{Z}_p)$.

1.4 Application : les groupes d'ordre p^3

Soient p un nombre premier et G un groupe non abélien d'ordre p^3 , on se propose de montrer que si $p > 2$, G est toujours un produit semi-direct. On rappelle que tout groupe d'ordre p^2 est abélien.

Supposons tout d'abord que tout élément de G soit d'ordre p , soit H un sous-groupe (nécessairement distingué¹) d'ordre p^2 de G , alors $H = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ et tout élément x de G non dans H réalise $G = H \rtimes \langle x \rangle$. On suppose donc qu'il existe un élément engendrant un sous-groupe H cyclique d'ordre p^2 (donc nécessairement distingué) : G est donc une extension de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$. On commence donc par regarder les actions de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$; le générateur 1 de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ agit par la multiplication par $k \in (\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})^*$, avec $k^p = 1 \pmod{p^2}$, d'où $k = 1 + up$. L'action ne peut pas être triviale (le centre serait de cardinal p^2), donc u est premier à p . Or on connaît la cohomologie d'un groupe cyclique : il vient

$$H^2(K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, H) = H^K / TH.$$

Si x est invariant sous K , alors $x = x + pux$; puisque u est inversible, x est donc divisible par p . Les éléments de TH sont les

$$y = \left(1 + (1 + pu) + \cdots + (1 + pu)^{p-1}\right)x$$

pour $x \in H$; puisque $p^2 = 0$ dans H , un tel y s'écrit après développement

$$y = px \left(1 + \frac{p(p-1)}{2}u\right).$$

On en déduit par conséquent que, quelle que soit l'action :

$$H^2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ est impair,} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } p = 2. \end{cases}$$

Ainsi, si p est impair, toutes les extensions de $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sont produit semi-direct (ne dépendant pas, à isomorphisme près, de l'action), et si $p = 2$, il y a une autre extension possible (c'est H_8).

EXERCICE – Montrer que $H^2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0$ si $p = 2$, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si $p > 2$. Qu'en conclure ?

2 Extensions générales

2.1 Classification des extensions

On considère maintenant le cas où G est une extension de K par N , et où N n'est plus nécessairement abélien. On note $\text{Inn } N$ le groupe des automorphismes intérieurs de N , $\text{Out } N$ le groupe quotient $\text{Out } N = \text{Aut } N / \text{Inn } N$, et $\nu : \text{Aut } N \rightarrow \text{Out } N$ la flèche de projection. On a une action par conjugaison $G \rightarrow \text{Aut } N$; la flèche composée $G \rightarrow \text{Aut } N \rightarrow \text{Out } N$ est triviale sur N , d'où une flèche $\chi : K \rightarrow \text{Out } N$, que l'on appelle *couplage*. On appelle C le centre de N ; χ induit alors une flèche $\varphi : K \rightarrow \text{Aut } C$.

¹Dans un p -groupe, il existe des sous-groupes distingués de tout ordre et tout sous-groupe d'indice p est distingué, tout ceci se prouve par récurrence en utilisant qu'il existe toujours un élément central d'ordre p .

Inversement, soit χ un morphisme de K vers $\text{Out } N$. On se donne une présentation $1 \rightarrow R \xrightarrow{\iota} F \xrightarrow{\pi} K \rightarrow 1$ de K , où F est un groupe libre, et $R = \ker \pi$ est un sous-groupe distingué de F ; F étant libre, il est projectif, donc $\chi \circ \pi$ se relève en une $\xi : F \rightarrow \text{Aut } N$, qui vérifie alors $\nu \circ \xi = \chi \circ \pi$. On a donc $\xi(R) \subset \ker \nu = \text{Inn } N$. Or R est un sous-groupe du groupe libre F , et est donc libre, et par conséquent projectif : en notant $\tau : N \rightarrow \text{Aut } N$ la conjugaison, dont l'image est $\text{Inn } N$, il existe donc $\eta : R \rightarrow N$ telle que $\tau \circ \eta = \xi \circ \iota$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{\iota} & F & \xrightarrow{\pi} & K & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow \eta & & \downarrow \xi & & \downarrow \chi & & \\
 & & N & \longrightarrow & \text{Aut } N & \xrightarrow{\nu} & \text{Out } N & \longrightarrow & 1
 \end{array} \tag{12}$$

Le morphisme $\xi : F \rightarrow \text{Aut } N$ permet de construire le groupe $S = F \rtimes_{\xi} N$.

THÉORÈME 1 - Soient N, K deux groupes, $\chi : K \rightarrow \text{Out } N$ fixé, et $S = F \rtimes_{\xi} N$ comme ci-dessus; alors les extensions de K par N de couplage χ sont en bijection avec les quotients S/M , où M est un sous-groupe distingué de S tel que $M \times N \rightarrow RN$ soit bijective.

Soit en effet N un tel sous-groupe : on définit alors

$$\bar{\mu} : \begin{cases} N & \longrightarrow & S/M \\ a & \longmapsto & aM \end{cases} \quad \text{et} \quad \bar{\varepsilon} : \begin{cases} S/M & \longrightarrow & K \\ faM & \longmapsto & \pi(f) \end{cases} \quad (a \in N, f \in F).$$

La suite $1 \rightarrow N \xrightarrow{\bar{\mu}} S/M \xrightarrow{\bar{\varepsilon}} K \rightarrow 1$ est alors exacte. On note $\bar{\chi}$ le couplage ainsi obtenu; si $g \in K, f \in F$ tel que $\pi(f) = g$, alors, puisque $S = F \rtimes_{\xi} N$, la conjugaison par f induit $\xi(f)$ sur N , d'où successivement :

$$\bar{\chi}(g) = \nu(\xi(f)) = \chi(\pi(f)) = \chi(g),$$

ce qui montre que $\chi = \bar{\chi}$.

Inversement, soit $1 \rightarrow N \xrightarrow{\mu} G \xrightarrow{\varepsilon} K \rightarrow 1$ une extension de couplage χ ; on forme un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{\iota} & F & \xrightarrow{\pi} & K & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow \kappa & & \downarrow \gamma & & \parallel & & \\
 1 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\mu} & G & \xrightarrow{\varepsilon} & K & \longrightarrow & 1 \\
 & & \parallel & & \downarrow \lambda & & \downarrow \chi & & \\
 & & N & \xrightarrow{\tau} & \text{Aut } N & \xrightarrow{\nu} & \text{Out } N & \longrightarrow & 1
 \end{array} \tag{13}$$

γ et κ sont des relèvements obtenus de même que ci-dessus en utilisant le fait que F et R sont projectifs; si $x \in G, \lambda(x)$ est l'automorphisme de N provenant de la conjugaison par x dans $\text{Im } \mu$: alors $\mu(\lambda(x)(a)) = x^{-1}\mu(a)x$, donc $\chi\varepsilon = \nu\lambda$.

On en déduit $\nu\lambda\gamma = \chi\pi = \nu\xi$; puisque $\ker \nu = \text{Inn } N, \lambda\gamma(x)$ diffère donc de $\xi(x)$ par un automorphisme intérieur $\lambda(\mu(n_x))$, où $n_x \in N$, c'est-à-dire :

$$\xi(x) = \lambda(\gamma(x) \mu(n_x)).$$

Soit X une base du groupe libre F ; on définit un morphisme $\sigma : F \rightarrow G$ en posant, pour $x \in X$, $\sigma(x) = \gamma(x)\mu(n_x)$. On a alors $\varepsilon\sigma x = \varepsilon\gamma x = \pi x$ pour $x \in X$, d'où $\pi = \varepsilon\sigma$; on vérifie en outre sur la définition que $\xi = \lambda\sigma$. On définit une application $\omega : S \rightarrow G$ par $\omega(fa) = \sigma(f)\mu(a)$; alors, pour $x \in X$, $a \in N$, on a :

$$\omega(xax^{-1}) = \mu(\xi(x)(a)) = \mu(\lambda(\sigma(x))(a)) = \sigma(x)\mu(a)\sigma(x)^{-1},$$

ce qui montre que ω est un morphisme de groupes. Puisque $G = \gamma(F)\mu(N)$, ω est surjective. On note M le noyau de ω : alors M est l'ensemble des produits ra , avec $r \in R$ et $a \in N$, tels que $\mu(a)\sigma(r) = 1$. On en déduit que $M \times N = RN$. Soient maintenant $\bar{\mu}$ et $\bar{\varepsilon}$ définis comme ci-dessus; le morphisme ω est alors une équivalence entre l'extension $1 \rightarrow N \rightarrow S/M \rightarrow K \rightarrow 1$ et G .

2.2 Interlude : la résolution de Gruenberg

On oublie temporairement les notations du paragraphe précédent.

Soient G un groupe, N un sous-groupe distingué de G : alors la projection canonique $G \rightarrow G/N$ induit une flèche $\mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}(G/N)$. Notons \bar{I}_N le noyau de cette flèche. On note également I le $\mathbb{Z}G$ -module engendré par $I_N \subset I_G$; on a évidemment $I \subset \bar{I}_N$. Si $n \in N$ et $g \in G$, alors $ng - g = (n - 1)g$ appartient à I ; par conséquent, $\mathbb{Z}G/I$ est un (G/N) -module; on en déduit que \bar{I}_N agit trivialement sur $\mathbb{Z}G/I$, puis que $\bar{I}_N \subset I$. Finalement, \bar{I}_N est l'idéal engendré par les $x - 1$, pour $x \in N$, $x \neq 1$.

THÉORÈME – Soit $1 \rightarrow R \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 1$ une présentation d'un groupe G ; on a alors la résolution libre de \mathbb{Z} (comme $\mathbb{Z}G$ -module) suivante, appelée résolution de Gruenberg associée à la présentation donnée :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longrightarrow & \bar{I}_R^n / \bar{I}_R^{n+1} & \longrightarrow & I_F \bar{I}_R^{n-1} / I_F \bar{I}_R^n & \longrightarrow & \bar{I}_R^{n-1} / \bar{I}_R^n & \longrightarrow & \dots \\ \dots & \longrightarrow & \bar{I}_R^2 / \bar{I}_R^3 & \longrightarrow & I_F \bar{I}_R / I_F \bar{I}_R^2 & \longrightarrow & \bar{I}_R / \bar{I}_R^2 & \longrightarrow & I_F / I_F \bar{I}_R & \longrightarrow & \mathbb{Z}G & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

EXEMPLES –

- la résolution de Gruenberg associée à la résolution standard $1 \rightarrow R \rightarrow \mathcal{F}G \rightarrow G \rightarrow 1$ n'est autre que la résolution standard;
- dans le cas où G est un groupe cyclique, il est naturel de choisir la résolution $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \rightarrow G \rightarrow 0$; on retrouve alors le résultat sur la périodicité des groupes de cohomologie.

Le point le plus délicat de la preuve est la liberté des G -modules concernés :

LEMME – Soit $F = \mathcal{F}S$ un groupe libre; alors son idéal d'augmentation I_F est le F -module libre engendré par $\bar{S} = \{s - 1, s \in S\}$.

Soit α une fonction définie sur \bar{S} et à valeurs dans un F -module M . On définit un morphisme $\alpha' : F \rightarrow F \rtimes M$ par $\alpha'(s) = (s, \alpha(s - 1))$ pour $s \in S$. Si $f \in F$, $\alpha'(f)$ s'écrit alors $(f, \delta(f))$; le fait que α' soit un morphisme de groupe revient alors à écrire que δ est un cocycle. I_F est le groupe abélien libre engendré par les $f - 1$ pour $f \in F$, ce qui permet de définir un morphisme de

groupes abéliens $\beta : I_F \rightarrow M$ par $\beta(f - 1) = \delta(f)$. On vérifie alors que $\beta(s - 1) = \alpha(s - 1)$ pour $s \in S$; en outre,

$$\beta(g(f - 1)) = \beta((gf - 1) + (f - 1)) = g\beta(f - 1)$$

montre que β est bien F -linéaire.

PROPOSITION – Soit R un sous-groupe distingué d'un groupe libre F ; soit X une base de R comme groupe libre. Alors \bar{I}_R est le F -module libre de base $\{x - 1, x \in X\}$.

Soit $\sum a_x(x - 1) = 0$ une relation, où les a_x appartiennent à $\mathbb{Z}F$; alors a_x s'écrit $a_x = \sum b_{x,t}t$, où l'indice t décrit un système T de représentants de F/R dans F et $b_{x,t}$ appartient à $\mathbb{Z}R$. On en déduit alors : pour tout T , $\sum b_{x,t}(x - 1) = 0$; I_R étant libre, il vient $b_{x,t} = 0$.

LEMME – Soient $1 \rightarrow R \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 1$ une suite exacte, où F (et donc R) est un groupe libre, I, J des idéaux de $\mathbb{Z}F$ qui sont des F -modules libres de base respectivement X et Y , alors :

1. $S/S\bar{I}_R$ est un G -module libre de base $\{x + S\bar{I}_R, x \in X\}$;
2. ST est un F -module libre de base $\{xy, x \in X, y \in Y\}$.

Ceci termine la preuve du théorème.

2.3 Obstruction

Soient N et K deux groupes, et $\chi : K \rightarrow \text{Out } N$; on garde les notations du paragraphe 2.1. Pour $r \in R$ et $f \in F$, notons

$$f \star r = \eta(r)^{-1} \xi(f) (\eta(f^{-1}(r))) \in N;$$

alors, puisque $\tau\eta = \xi$ (diagramme 12), et que, pour $\alpha \in \text{Aut } N$, $\alpha\tau = \tau \circ \alpha$, il vient $\tau(f \star r) = \xi(r)^{-1} \xi(r) = 1$; $f \star r$ appartient donc à $\ker \tau$, c'est-à-dire au centre C de N . On vérifie que l'on a en outre $f \star (r_1 r_2) = (f \star r_1)(f \star r_2)$, et $(f_1 f_2) \star r = (f_2 \star r) \xi(f_2) (f_1^{-1} r f_1)$.

Considérons maintenant la résolution de Gruenberg associée à $R \rightarrow F \rightarrow K \rightarrow 1$:

$$\dots \longrightarrow \bar{I}_R^2 / \bar{I}_R^3 \longrightarrow I_F \bar{I}_R / I_F \bar{I}_R^2 \longrightarrow \bar{I}_R / \bar{I}_R^2 \longrightarrow I_F / I_F \bar{I}_R \longrightarrow \mathbb{Z}K \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Soient X et Y des bases respectives des groupes libres F et R ; alors $I_F \bar{I}_R / I_F \bar{I}_R^2$ est un K -module libre de base $\{(1 - x)(1 - y) + I_F \bar{I}_R^2, x \in X, y \in Y\}$. Notons ψ le K -homomorphisme défini par :

$$\psi : \begin{cases} I_F \bar{I}_R / I_F \bar{I}_R^2 & \longrightarrow C \\ (1 - x)(1 - y) + I_F \bar{I}_R^2 & \longmapsto x \star y \end{cases}$$

Les propriétés de \star montrent alors successivement :

$$(\forall x \in X) (\forall r \in R) \quad \psi \left((1 - x)(1 - r) + I_F \bar{I}_R^2 \right) = x \star r,$$

puis

$$(\forall f \in F) (\forall r \in R) \quad \psi \left((1-f)(1-r) + I_F \bar{I}_R^2 \right) = x \star r.$$

Si r_1, r_2 appartiennent à R , alors $r_1 \star r_2 = 1$, ce qui montre que $\psi \left(\bar{I}_R^2 / I_F \bar{I}_R^2 \right) = 1$; ψ induit donc un K -homomorphisme $\varphi : I_F \bar{I}_R / \bar{I}_R \rightarrow C$.

On remarque que $H^3(H^3(K, C))$ est le conoyau de la flèche

$$\partial : \text{Hom}_K \left(\bar{I}_R / \bar{I}_R^2, C \right) \longrightarrow \text{Hom}_K \left(I_F \bar{I}_R / \bar{I}_R^2, C \right)$$

On admet le théorème suivant, dont on trouvera une démonstration dans le paragraphe 5.5 de [Gru] :

THÉORÈME – *La classe de φ dans $H^3(K, C)$ ne dépend que de χ , et en variant η on obtient toute la classe.*

DÉFINITION – *La classe de φ est appelée obstruction de χ ; on la note $\text{Ob } \chi$.*

THÉORÈME – *Il existe une extension de K par N de couplage ξ si, et seulement si, l'obstruction de χ est nulle.*

Supposons qu'il existe une extension $1 \rightarrow N \rightarrow G \rightarrow K \rightarrow 1$ de couplage χ , et formons alors le diagramme 13. Puisque $\xi = \lambda \circ \gamma$, il vient, pour tout $f \in F$ et tout $r \in R$, $f \star r = 1$; ceci prouve que l'obstruction de χ est nulle.

Inversement, si la classe de φ est nulle, d'après le théorème précédent, il existe un choix de η pour lequel, pour tout $r \in R$ et tout $f \in F$, $f \star r = 0$; il vient donc :

$$\eta(f(r)) = \xi(f)(\eta(r)).$$

Soit alors $M = \{r\eta(r^{-1}), r \in R\}$; c'est un sous-groupe de S . Puisque $r \mapsto r\eta(r^{-1})$ est un F -morphisme de groupes, M est distingué dans FM . Pour $x \in N$, puisque $\tau \circ \eta = \xi$, il vient :

$$(r\eta(r^{-1}))x\eta(r)r^{-1} = (\xi(r)\xi(r^{-1}))(x) = x.$$

Par conséquent, $[M, N] = 1$, et M est distingué dans $FN = S$; on vérifie en outre que $M \times N \rightarrow RN$ est bijective, ce qui montre que M vérifie les hypothèses du théorème 1.

On admet encore le résultat suivant :

THÉORÈME – *Dans le cas où l'obstruction de χ est nulle, les extensions de K par N de couplage χ sont classifiées par $H^2(K, C)$.*

3 Le H^2 comme obstruction à l'extension des représentations

Soient G un groupe, N un sous-groupe distingué, $\rho : N \rightarrow GL_K(V)$ une représentation irréductible de dimension finie de N , K étant un corps algébriquement clos. On se propose d'étudier à quelle condition ρ s'étend en une représentation de G tout entier dans V . Parmi les

exemples importants, il y a le passage de \mathfrak{A}_n à \mathfrak{S}_n , de SL_n à GL_n , mais aussi de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/K)$ à $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ etc...

Une condition nécessaire évidente est la suivante, où on note ρ^g la représentation de N sur V tordue par $g \in G$ définie par $\rho^g(n) = \rho(gng^{-1})$:

$$(\forall g \in G) \quad \rho^g \simeq \rho. \quad (14)$$

Cette condition peut par exemple se vérifier pour des groupes finis sur le caractère : il suffit de voir que le caractère prend des valeurs constantes sur les classes de conjugaison par G .

Supposons cette condition vérifiée.

Soit (g_i) une famille de représentants des classes de G/N . Pour chaque i on se fixe a_{g_i} un endomorphisme de V tel que $\rho^{g_i} = a_{g_i} \rho a_{g_i}^{-1}$. Si $g \in G$, on peut écrire de manière unique $g = g_i n$ pour un $n \in N$, et on pose $a_g = a_{g_i} a_n$, on a alors :

$$(\forall g \in G) (\forall n \in N) \quad a_g a_{g^{-1}ng} = a_n a_g \quad \text{et} \quad a_{gn} = a_g a_n.$$

Considérons l'application $f(g, g') = a_{gg'} a_{g'}^{-1} a_g^{-1}$; alors via les identités ci-dessus, $f(g, g') \rho = \rho f(g, g')$, et donc, par le lemme de Schur (ici on utilise que ρ est irréductible et donc $\text{End}_\rho(V)$ est une algèbre à division de dimension finie, ainsi que l'hypothèse sur K), $f(g, g')$ est une homothétie, donc dans K^* . f est un 2-cocycle de G à valeurs dans K^* ; de plus, toujours par les identités plus haut, f ne dépend que des g, g' modulo $N \times N$. Elle a donc une classe dans $H^2(G/N, K^*)$ (K^* étant vu avec l'action triviale de G/N), que l'on note $\text{Ob}(\rho)$. On a alors le

THÉORÈME 2 – *Supposons (14) vérifiée ; alors ρ se prolonge à G si, et seulement, si $\text{Ob}(\rho) = 0$.*

Preuve : notons que, si on change le choix des a_{g_i} en des a'_{g_i} , et donc f en f' , a'_{g_i} diffère nécessairement de a_{g_i} par un scalaire $\varepsilon(g_i)$ par le lemme de Schur, et f est modifiée par un 1-cobord : $f' = f \partial \varepsilon$, ce qui fait que l'application Ob plus haut ne dépend pas de f . Réciproquement, $f' = f \partial \varepsilon$ convient encore pour tout $\varepsilon \in Z^1(G/N, K^*)$.

De plus, $\text{Ob} \rho$ est nulle dans $H^2(G/N, K^*)$ si, et seulement si, on peut choisir f comme étant un 1-cobord, soit $f = \partial \varepsilon$. Dans ce cas, $\rho'(g) = a_g \varepsilon(g)$ est la représentation cherchée. Réciproquement, si la représentation se prolonge, $a_g = \rho'(g)$ convient. QED

Notons que la condition (14) est toujours vérifiée par un sous-groupe de G contenant N , dans ce sens qu'on pourra toujours tenter de prolonger à ce dernier. De plus, un cas simple d'annulation de Ob est le cas où $H^2(G/N, K^*)$ est nul (rappelons que l'action est supposée triviale ici, ainsi que dans la proposition ci-dessous).

Toujours par le calcul de la cohomologie des groupes cycliques (voir les rappels), on a la proposition suivante :

PROPOSITION – *Soit K un corps algébriquement clos, $H^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, K^*) = 0$.*

EXERCICE – *Rappeler pourquoi si G est un groupe abélien, tout caractère d'un sous-groupe H quelconque de G s'étend en un caractère de G . Autrement dit, l'obstruction d'un caractère d'un sous-groupe de G est toujours nulle.*

4 Groupe de Brauer

Soit K un corps ; on appelle *algèbre* sur K une algèbre associative unitaire de dimension finie, non nécessairement commutative, sur K . Une telle algèbre est dite *centrale* si son centre est réduit à K , *simple* si elle n'a pas d'idéal bilatère non trivial, et à *division* si tout élément non nul est inversible. Par exemple, l'algèbre de matrices $M_n(K)$ est centrale simple ; l'algèbre de quaternions \mathcal{H} sur \mathbb{R} est centrale simple et à division. Il n'existe pas d'algèbre à division sur un corps algébriquement clos (en effet, si $x \in A$, alors $K[x]$ est une extension finie de K).

4.1 Motivations

1. Soit \mathcal{H} l'algèbre des quaternions sur \mathbb{R} ; alors, puisque $\text{Lie}(\mathcal{H}^*) \otimes \mathcal{C} = \text{Lie}(GL_2(\mathbb{R})) \otimes \mathcal{C}$, les deux algèbres ont mêmes représentations complexes en dimension finie. En outre, d'après la suite exacte courte

$$1 \longrightarrow \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathcal{H}^* \longrightarrow SU_2(\mathcal{C}) \longrightarrow 1,$$

le quotient de \mathcal{H}^* par son centre est compact ; or, si V est une représentation irréductible de dimension finie de \mathcal{H}^* , le centre de \mathcal{H}^* agit trivialement ; on ramène donc la théorie des représentations du groupe non compact $GL_2(\mathbb{R})$ à celle de $SU_2(\mathcal{C})$, qui est compact. C'est un exemple de l'« astuce unitaire de Weyl ». Finalement, on a : $\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C} = M_2(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}$; les deux algèbres sont dites des *formes tordues* l'une de l'autre.

2. Une algèbre A sur K est dite *semi-simple* si toutes ses représentations sont semi-simples. Un théorème dû à Wedderburn (voir plus bas) affirme que toute telle algèbre est isomorphe à une somme directe de facteurs du type $M_n(D)$, où D est une algèbre à division.
3. Soient G un groupe, et V une représentation simple de dimension finie de G ; alors $\text{End}_G V$ est une algèbre à division.
4. En considérant l'algèbre de quaternions sur \mathbb{Q} $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}$, on peut démontrer le théorème des quatre carrés.

Soit K un corps ; on note $\left(\frac{a,b}{K}\right)$ l'algèbre $K \oplus Ki \oplus Kj \oplus Kk$, munie de la table de multiplication définie par $i^2 = a$, $j^2 = b$, et $k = ij = -ji$; on a alors $k^2 = -ab$. On vérifie qu'il s'agit bien d'une K -algèbre ; il est évident que, pour toute extension L de K , on a $\left(\frac{a,b}{K}\right) \otimes_K L = \left(\frac{a,b}{L}\right)$.

THÉORÈME – $\left(\frac{a,b}{K}\right)$ est centrale simple sur K . Elle est, soit à division, soit isomorphe à $M_2(K)$; on dit alors qu'elle est scindée. Elle est scindée si, et seulement si, la conique $aX^2 + bY^2 = Z^2$ a une solution non triviale dans K .

Il est facile de voir que $A = \left(\frac{a,b}{K}\right)$ est centrale simple. Si V est un K -espace vectoriel sur lequel A agit linéairement, alors A s'injecte dans $\text{End}_K(V)$; par conséquent, V est de dimension au moins 2 sur K . Supposons qu'il existe un diviseur de zéro z dans A ; l'annulateur à gauche de z est un idéal à gauche de A , et par conséquent de dimension au moins deux. Mais Az est alors de dimension au plus deux, donc de dimension deux, et par conséquent A est isomorphe à $\text{End}_K(Az) \simeq M_2(K)$.

Supposons maintenant A à division ; alors, pour tous $x, y, z \in K$ non tous nuls,

$$N(xi + yj + zk) = ax^2 + by^2 - abz^2$$

est non nul, on passe facilement de là à la conique de l'énoncé. Réciproquement, s'il existe une solution non triviale, elle fournit un diviseur de zéro dans A .

Par conséquent, dans tous les cas, $\left(\frac{a,b}{K}\right)$ se scinde après extension (au plus quadratique) des scalaires à $K(\sqrt{b})$.

Le théorème de structure clé est le suivant, pour plus de détails sur sa preuve (admise dans l'exposé) on pourra consulter [Farb] ou [Bour] :

THÉORÈME (WEDDERBURN) – Soit A une algèbre centrale simple sur K ; alors A est de la forme $M_n(D)$, où D est une algèbre à division. A a une unique représentation simple de dimension finie V , et $D = \text{End}_K(V)$; par conséquent, D est déterminé par A .

Preuve rapide : Soit A un anneau unitaire, on rappelle qu'un A -module (à gauche) M est dit semi-simple si l'une des trois conditions équivalentes suivante est vérifiée

- i) Tout sous-module de M a un supplémentaire,
- ii) M est somme de sous-modules simples,
- iii) M est somme directe de sous-modules simples.

Cette équivalence est laissée en exercice, les preuves généralisant celles de la théorie des espaces vectoriels. Ainsi, si M est semi-simple, par ii) tout quotient et tout sous-module l'est aussi. Enfin, A est dit semi-simple s'il l'est comme A -module, ou de manière équivalente si tout A -module l'est.

Soit A une K -algèbre semi-simple, A est alors somme directe finie de sous-modules simples. On les regroupe selon leur classes d'isomorphie (indexée par I) et $A = \bigoplus_{i \in I} M_i^{n_i}$. En particulier, on en déduit que $A^{\text{opp}} \simeq \text{End}_A(A) = \bigoplus_{i \in I} M_{n_i}(D_i)$ où $D_i = \text{End}_A(M_i)$ est une K -algèbre à division. A est centrale sur K si, et seulement si, tous les D_i le sont. Réciproquement toute telle algèbre est semi-simple. Ceci est le premier théorème de *Wedderburn*.

Enfin, montrons qu'une K -algèbre simple est semi-simple, ça prouvera l'existence annoncée dans le théorème. Soit I un idéal minimal à gauche de A , I est un A -module simple, $A \rightarrow L_K(I)$ est injectif par simplicité de A . I est de dimension finie sur K , soit e_1, \dots, e_n une base, alors $Ae_i = I$ pour tout i par minimalité de I . Ainsi $a \rightarrow (ae_1, \dots, ae_n)$ est une injection de A dans I^n comme A -module à gauche, et A est semi-simple comme sous-module d'un module semi-simple. Ce qu'il fallait démontrer. On déduit de plus de l'injection $A \hookrightarrow I^n$ que I est l'unique A -module simple, que $A \simeq I^p$, puis que $A^{\text{opp}} \simeq M_p(D)$ où $D = \text{End}_A(I)$ est une algèbre à division bien déterminée (car I l'est à isomorphisme près). \square

Remarque : Notons en corollaire que "toute algèbre centrale simple sur un corps algébriquement clos k " est isomorphe à un $M_n(k)$.

4.2 Groupe de Brauer et cohomologie

LEMME – Soit A/K une algèbre centrale simple, et B/K simple ; alors $A \otimes_K B$ est simple, de centre $Z(B)$.

Soit en effet $x = \sum a_i \otimes b_i$ appartenant au centre de $A \otimes_K B$, où l'écriture de x est de longueur minimale ; supposons qu'il existe i tel que $a_i \notin K$. A étant centrale, il existe $u \in A$ tel que $a_i u \neq u a_i$; il s'ensuit que $x(u \otimes 1) \neq (u \otimes 1)x$. Ceci contredit l'hypothèse de minimalité ; c'est absurde, et par conséquent $x \in K$.

Pour la simplicité, soit I un idéal bilatère de $A \otimes_K B$, $x = \sum_i a_i \otimes b_i$ non nul dans I de longueur minimale (en particulier les b_i sont libres sur K dans B , idem pour les a_i). Par simplicité de A , $A a_1 A = A$ et donc on peut trouver des u_i, v_i tels que $\sum_i u_i a_1 v_i = 1$, ainsi $\sum_i u_i x v_i \in I$, il est non nul par liberté des b_i , et quitte à remplacer x par ce dernier, on peut supposer $a_1 = 1$. Mais alors par minimalité, $ax - xa = 0$, puis $aa_i = a_i a$ pour tout i et $a \in A$. Ainsi, $Z(A) = K$ donne que les a_i sont dans K et donc x dans $1 \otimes_K B$. Par simplicité de B , $1 \otimes_K B$ est dans I , puis $I = A \otimes_K B$, QED.

En particulier, le produit tensoriel de deux algèbres centrales simples est une algèbre centrale simple.

COROLLAIRE – Soit A une K -algèbre centrale simple.

1. Soit L une extension du corps K ; alors la L -algèbre $A \otimes_K L$ est encore centrale simple.
2. Si L est algébriquement clos, $A \otimes_K L = M_n(L)$, en particulier $\dim_K(A)$ est un carré. Toute algèbre à division est de dimension sur son centre égale à un carré.
3. Soit $n = \dim_K A$; alors on a un isomorphisme canonique

$$\begin{aligned} A \otimes_K A^{\text{opp}} &\longrightarrow \text{End}_{k\text{-ev}}(A) \simeq M_n(K) \\ a \otimes b &\longmapsto (x \mapsto axb) \end{aligned}$$

L'ensemble des classes d'isomorphisme d'algèbres centrales simples sur A est donc un monoïde pour le produit tensoriel. On note $A \sim A'$ s'il existe des entiers n et n' tels que $M_n(A)$ soit isomorphe à $M_{n'}(A')$. Cette relation commute au produit tensoriel ; le lemme précédent montre alors que le monoïde quotient est un groupe.

De plus, par le théorème de Wedderburn, toute algèbre centrale simple A est équivalente à une algèbre à division centrale ; si $D = D'$ sont deux algèbres centrales à division équivalentes, il existe n, n' tels que $M_n(D) \simeq M_{n'}(D')$. En comptant les familles maximales d'idempotents orthogonaux, il vient $n = n'$. La colonne $V = D^n$ étant l'unique représentation simple de $M_n(D)$, et son algèbre d'endomorphismes étant précisément D , cela montre que $D = D'$; par conséquent, toute algèbre centrale simple est équivalente à une unique algèbre à division centrale. Le fait qu'on ait utilisé les algèbres centrales simples plutôt que les algèbres à division centrales vient de ce que ces dernières ne sont pas stables par produit tensoriel.

DÉFINITION – On appelle groupe de Brauer de K ce groupe ; on le note $\text{Br}(K)$.

Puisque l'extension des scalaires commute au produit tensoriel, si L est une extension de K , on a une flèche naturelle $\text{Br}(K) \rightarrow \text{Br}(L)$.

EXEMPLE (LE PRINCIPE DE HASSE) – On a ainsi une flèche

$$\text{Br}(\mathbb{Q}) \longrightarrow \prod_{p, \infty} \text{Br}(\mathbb{Q}_p) = \prod_p \text{Br}(\mathbb{Q}_p) \oplus \text{Br}(\mathbb{R}).$$

D'après la théorie du corps de classes, cette flèche est injective et tombe dans la somme directe (une algèbre centrale simple sur \mathbb{Q} est presque partout scindée); on en déduit le théorème de Hasse-Minkowski : si une \mathbb{Q} -algèbre centrale simple A est scindée sur \mathbb{Q}_p pour tout p et sur \mathbb{R} , alors elle est scindée sur \mathbb{Q} . Par exemple en l'appliquant à la discussion précédente sur les algèbres de quaternion, on obtient la forme classique du théorème : "Une conique projective plane rationnelle a une solution si, et seulement si, elle en a une dans \mathbb{R} et dans \mathbb{Q}_p pour tout p ". En effet, toute conique projective plane est équivalente à une multiple de celles de la forme $aX^2 + bY^2 = Z^2$.

Soit L une extension finie galoisienne; on note $\text{Br}(L/K)$ le noyau de la flèche naturelle de $\text{Br}(K) \rightarrow \text{Br}(L)$:

$$0 \longrightarrow \text{Br}(L/K) \longrightarrow \text{Br}(K) \longrightarrow \text{Br}(L).$$

THÉORÈME – Pour toute extension finie galoisienne L de K , $\text{Br}(L/K)$ est isomorphe à $H^2(\text{Gal } L/K, L^*)$.

On suppose K parfait; cette hypothèse n'est pas nécessaire, mais simplifie les démonstrations, et sera toujours vérifiée dans les applications envisagées.

On aura besoin des deux résultats suivants (admis lors de l'exposé) dont on repousse la discussion après la preuve du théorème principal.

THÉORÈME (SKOLEM-NOETHER) – Soient A/K centrale simple, B/K simple, $i_1, i_2 : B \hookrightarrow A$; il existe alors un automorphisme intérieur φ de A tel que $\varphi \circ i_2 = i_1$.

En particulier, tout automorphisme de $M_n(K)$ est intérieur, et deux matrices de même polyôme minimal sont conjuguées : ce sont deux cas particuliers bien connus de ce théorème.

THÉORÈME DU BICOMMUTANT – Soit A une K -algèbre centrale simple.

1. Si L est une extension finie galoisienne de K telle que $A \in \text{Br}(L/K)$, alors il existe une unique B équivalente à A , telle que $B \supset L$, $[B : K] = [L : K]^2$, et le centralisateur de L dans B est réduit à L ;
2. si A contient L et si le centralisateur de L dans A est réduit à L , alors $A \otimes_K L \simeq M_n(L)$.

Soit $A/K \in \text{Br}(L/K)$, où L est une extension finie galoisienne de K ; alors, d'après la première partie du théorème du bicommutant, on peut supposer $L \subset A$ et $C_A(L) = L$. Pour tout $\sigma \in \text{Gal}(L/K)$, d'après le théorème de Skolen-Noether, il existe $x_\sigma \in A^*$ tel que, pour tout $a \in L$, $\sigma(a) = x_\sigma a x_\sigma^{-1}$; posons alors $f(\sigma, \tau) = x_{\sigma\tau} x_\tau^{-1} x_\sigma^{-1}$. $f(\sigma, \tau)$ commute à L , et appartient donc à L^* ; de plus, par des arguments désormais courants dans cet exposé, f appartient à $Z^2(C, L^*)$. f définit donc une classe de cohomologie dans $H^2(G, L^*)$, d'où une application

$$\text{Br}(L/K) \longrightarrow H^2(\text{Gal } L/K, L^*).$$

Les x_σ sont une base de A sur L , et f donne la table de multiplication. On ne vérifie pas que c'est un morphisme de groupe, le lecteur curieux pourra consulter [Farb] pour la démonstration.

Si à présent $f \in H^2(\text{Gal } L/K, L^*)$, on considère le L -espace vectoriel A dont une base est l'ensemble des x_σ , avec la multiplication donnée par f , soit $x_\sigma x_\tau = f(\sigma\tau)^{-1} x_{\sigma\tau}$. On vérifie

que cette multiplication munit A d'une structure d'algèbre, et qu'elle est centrale simple, de cocycle f ; changer f par un cobord donne une algèbre A isomorphe. \square

Remarques sur les deux théorèmes plus haut : Le théorème de *Skolem – Noether* se prouve comme suit. On écrit $A = \text{End}_D(W)$, $W = V^s$ pour un certain entier s , V étant l'unique A -module simple, $D = \text{End}_A(V)$. W est alors un $B \otimes_K D$ -module de deux manières différentes, via i_1 et i_2 . De plus B est une K -algèbre simple, ainsi donc que $B \otimes_K D$ (car D est centrale, puis par un lemme plus haut), qui est donc semi-simple et n'a qu'un module simple, disons M . Ainsi, $W = M^n$ pour un certain n pour la première action, idem pour la seconde : les entiers n sont égaux par raison de dimension. Ainsi, i_1 et i_2 sont deux structures de $B \otimes_K D$ -modules isomorphes sur W , un isomorphisme de l'une sur l'autre donne le φ cherché. En effet, φ commutant à D est un élément de A , et $\varphi i_1(b) = i_2(b)\varphi$ donne $\varphi i_1 \varphi^{-1} = i_2$.

En ce qui concerne le second, on pourra se reporter à [Bour] ou [Farb].

4.3 Applications

LEMME – *La réunion de tous les groupes $\text{Br}(L/K)$, pour L/K finie galoisienne, est $\text{Br}(K)$ tout entier.*

Cela revient exactement à dire que toute algèbre centrale simple A se scinde par extension finie galoisienne du corps des scalaires. Soient $A = M_n(D)$ une algèbre centrale simple, et $x \in D \setminus K$; alors $K(x) \subset D$. On suppose (ce n'est pas nécessaire) K parfait; alors $L = K(x)$ est une extension séparable de K , et $D \otimes_K L^{\text{gal}} = M_{n'}(D')$, avec $n > 1$ (car cette algèbre contient $L \otimes L^{\text{gal}} \simeq L^d$); la dimension de cette algèbre étant strictement inférieure à $\dim_K A$, on peut finir par récurrence.

Le corollaire suivant est alors immédiat :

COROLLAIRE – $\text{Br}(K)$ est de torsion.

EXEMPLES –

1. Dans le cas où $K = \mathbb{R}$, la seule extension non triviale de \mathbb{R} étant \mathcal{C} , il vient :

$$\text{Br}(\mathbb{R}) = \text{Br}(\mathcal{C}/\mathbb{R}) = H^2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathcal{C}^*) = \mathbb{R}^*/\mathbb{R}_+^* = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z};$$

la seule classe non triviale de \mathbb{R} -algèbres centrales simples est donc la classe de \mathcal{C} .

2. Dans le cas où $K = \mathcal{F}_p$: d'après le lemme, $\text{Br}(\mathcal{F}_p) = \bigcup \text{Br}(\mathcal{F}_{p^n}/\mathcal{F}_p)$. D'après la remarque sur la cohomologie d'un groupe cyclique,

$$H^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathcal{F}_{p^n}^*) = \mathcal{F}_p^*/T(\mathcal{F}_{p^n}^*) = \mathcal{F}_p^*/N_{\mathcal{F}_{p^n}/\mathcal{F}_p}(\mathcal{F}_{p^n}^*).$$

Or T s'identifie au morphisme surjectif canonique

$$\mathcal{F}_{p^n}^* = \mathbb{Z}/(p^n - 1)\mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{F}_p^* = \mathbb{Z}/(p - 1)\mathbb{Z};$$

par conséquent, $\text{Br}(\mathcal{F}_p)$ est nul. Ceci prouve qu'il n'existe pas de corps fini non commutatif.

3. Dans le cas où $K = \mathbb{Q}_p$, on commence par démontrer le lemme suivant :

LEMME – Si D est une \mathbb{Q}_p -algèbre à division centrale, alors il existe une extension non ramifiée L de \mathbb{Q}_p qui scinde D .

Il existe une unique valuation discrète sur D pour laquelle elle est complète ; son idéal de valuation est principal d'uniformisante u disons et son corps résiduel pour cette valuation est alors un corps fini k (contenant $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$), et donc nécessairement commutatif. Si $k = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, alors il suit de la complétude de D que tout élément de O_D est une série en u à coefficient dans \mathbb{Z}_p , ce qui impose que D est commutatif, ce qui n'est pas, k est donc une extension de degré > 1 de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. En relevant un élément primitif de k par le lemme de Hensel, on obtient dans D une sous-extension non ramifiée de \mathbb{Q}_p , notons là L . Alors $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} D \simeq M_n(D')$ avec $n > 1$ comme dans le lemme plus haut, et on conclut par récurrence en notant que ce qu'on a dit est valable sur un corps local quelconque, pas seulement sur \mathbb{Q}_p . \square

On peut par conséquent se restreindre aux extensions non ramifiées de \mathbb{Q}_p , dont on sait qu'elles sont cycliques. Si L est une telle extension, de degré n , alors, de même que précédemment, $H^2(\text{Gal } L/\mathbb{Q}_p, L^*) = \mathbb{Q}_p^* / N_{L/\mathbb{Q}_p}(L^*)$; L/\mathbb{Q}_p étant non ramifiée on a $N_{L/\mathbb{Q}_p}(L^*) = p^n \mathbb{Z}_p^*$, le quotient cherché est donc exactement $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Par conséquent, $\text{Br}(\mathbb{Q}_p)$ est isomorphe à \mathbb{Q}/\mathbb{Z} . On fixe un isomorphisme, que l'on appelle l'invariant.

EXERCICE – Il n'y a qu'une algèbre de quaternions non triviale sur \mathbb{Q}_p .

Bibliographie

Pour cet exposé, on pourra consulter [Gru], [Farb], [Bour], [Rob].

Cohomologie des groupes

Jérôme Plût

Après quelques rappels sur les représentations de groupes, on introduit la notion de CW-complexe : il s'agit d'espaces topologiques assez sympathiques pour que le calcul de leur homologie soit purement combinatoire. Si G est un groupe, on appelle $K(G, 1)$ un CW-complexe dont le groupe fondamental est G et dont tous les autres groupes d'homotopie sont nuls ; un tel espace existe et est unique à homotopie près. On définit l'homologie d'un groupe G comme foncteur dérivé à gauche du foncteur qui à un G -module M associe ses coinvariants, et on en donne une description explicite. On prouve finalement que cela se ramène au calcul de l'homologie singulière de $K(G, 1)$. Les principales références utilisées au long de cet exposé sont [Brown] et [Ben].

1 Définitions et notations

Les anneaux sont toujours supposés unitaires, mais non nécessairement commutatifs.

1.1 Représentations d'un groupe G

Soit S un ensemble ; on appelle $\mathbb{Z}S$ le groupe abélien libre de base S . Si G est un groupe, on munit $\mathbb{Z}G$ de la multiplication donnée par la multiplication de G ; on obtient ainsi un anneau, non commutatif si G n'est pas abélien, que l'on appelle *l'algèbre du groupe G* . Exemples :

1. si $G = \mathbb{Z}$, alors $\mathbb{Z}G$ est l'anneau $\mathbb{Z}[T, T^{-1}]$;
2. si $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un groupe cyclique, alors $\mathbb{Z}G$ est l'anneau $\mathbb{Z}[T]/(T^n - 1)$;
3. soit $\mathcal{F}S$ le groupe libre de base S : l'algèbre $\mathbb{Z}\mathcal{F}S$ est alors « l'anneau libre » engendré par S , dans lequel les éléments de S sont inversibles.

Le foncteur $G \mapsto \mathbb{Z}G$ est adjoint à gauche du foncteur qui à un anneau associe son groupe des unités : ceci signifie que, si A est un anneau, alors tout morphisme de G vers le groupe des unités de A se prolonge de façon unique en un morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}G$ vers A , soit :

$$\mathrm{Hom}_{\text{anneaux}}(\mathbb{Z}G, A) = \mathrm{Hom}_{\text{groupes}}(G, A^*).$$

Nous appellerons ici *représentation* de G un groupe abélien M muni d'une action à gauche linéaire de G . Les représentations de G sont par conséquent exactement les $\mathbb{Z}G$ -modules à

gauche : en effet, si M est un groupe abélien, les morphismes de G dans $\text{Aut } M$ sont exactement les morphismes de $\mathbb{Z}G$ dans $\text{End } M$. On appellera donc aussi G -module une représentation de G et G -morphisme un morphisme G -équivariant. Si S est un G -ensemble, alors $\mathbb{Z}S$ est naturellement une représentation de G ; on l'appelle la représentation obtenue en linéarisant S . Si $S = G$, alors S est naturellement muni d'une action à gauche de G par multiplication ; on l'appelle l'action régulière de G . Elle donne lieu à une représentation de G dans $\mathbb{Z}G$, appelée la représentation régulière (gauche) de G . Cela revient à considérer $\mathbb{Z}G$ comme module sur lui-même par multiplication à gauche.

Par exemple, se donner une représentation de \mathbb{Z} revient à se donner un groupe abélien M , muni d'un automorphisme ; se donner une représentation de $\mathcal{F}S$ revient à se donner une famille d'automorphismes indexée par S ; se donner une représentation de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ revient à se donner un endomorphisme u d'ordre divisant n .

1.2 Invariants et coinvariants

On notera toujours \mathbb{Z} le G -module \mathbb{Z} , muni de l'action triviale. On note ε le morphisme $\mathbb{Z}G \rightarrow \text{End } (\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ ainsi défini, et on l'appelle *morphisme d'augmentation*. On note I son noyau, et on l'appelle *idéal d'augmentation* de $\mathbb{Z}G$. En pratique, ε est défini par $\varepsilon(g) = 1$ pour $g \in G$, et, si S est une partie génératrice de G , I est l'idéal de $\mathbb{Z}G$ engendré par les $s - 1$, où s décrit S .

Soit M un G -module. On appelle *sous-groupe des invariants de M* le plus grand sous-groupe de M sur lequel G agit trivialement :

$$M^G = \{x \in M, (\forall g \in G) gx = x\} = \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M).$$

On appelle *groupe des coinvariants de M* le plus grand quotient de M sur lequel G agit trivialement :

$$M_G = M/IM = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M.$$

Par exemple, si $M = (\mathbb{Z}G)^n$ est un $\mathbb{Z}G$ -module libre de type fini, alors $M_G = \mathbb{Z}^n$ est un \mathbb{Z} -module libre de même base. Ces constructions sont évidemment fonctorielles : si $f : M \rightarrow N$ est un G -morphisme, alors $f(M^G) \subset N^G$, et $f(IM) \subset IN$, ce qui permet de définir une application $M_G \rightarrow N_G$.

1.3 Produit tensoriel, homomorphismes

Sur un anneau non commutatif A , le produit tensoriel de deux modules M et N est défini lorsque M est un A -module à droite et N un A -module à gauche. Si en particulier A est l'anneau du groupe G , on peut considérer un A -module à gauche M comme un A -module à droite en faisant agir G à droite par $x \cdot g = g^{-1} \cdot x$. Construire de cette façon le produit tensoriel de deux G -modules revient à exiger que $gx \otimes gy = x \otimes y$ pour tous $g \in G$, $x \in M$, $y \in N$. On note $- \otimes_G -$ le produit tensoriel ainsi obtenu ; on a alors :

$$M \otimes_G N = (M \otimes_{\mathbb{Z}} N)_G,$$

où G agit diagonalement sur $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$. Ceci montre que le produit $- \otimes_G -$ est commutatif. De même, on peut faire agir G sur $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N)$ par $g \cdot u = g \circ u \circ g^{-1}$; les homomorphismes G -équivariants de M dans N sont alors les éléments de

$$\text{Hom}_G(M, N) = (\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N))^G.$$

1.4 Opérations sur les complexes

Soient M_{\star} et N_{\star} deux complexes de $\mathbb{Z}G$ -modules; on forme le complexe produit tensoriel en posant :

$$(M_{\star} \otimes_G N_{\star})_n = \bigoplus_{p+q=n} M_p \otimes_G N_q \quad \text{et} \quad d(x \otimes y) = dx \otimes y + (-1)^p x \otimes dy.$$

On définit également $\mathbf{Hom}_G(M_{\star}, N_{\star})$: son terme de degré n est le groupe des morphismes de complexes de degré n de M_{\star} dans N_{\star} , c'est-à-dire les familles (f_p) , où $f_p : N_p \rightarrow N_{n+p}$, soit encore :

$$(\mathbf{Hom}_G(M_{\star}, N_{\star}))_n = \prod_p \text{Hom}_G(M_p, N_{p+n})$$

On le munit de la dérivation définie par $d(f) = d \circ f - (-1)^n f \circ d$.

2 CW-complexes

On munit ici tous les groupes de la topologie discrète. Il existe des analogues de la plupart des résultats présentés ici pour des groupes topologiques; on les trouvera par exemple dans [Ben].

2.1 Définitions

On appelle *CW-complexe* un espace topologique X , muni d'une filtration $\emptyset = X^{-1} \subset X^0 \subset X^1 \subset \dots \subset X^n \subset \dots$, tel que :

1. les X^n recouvrent X ;
2. X^n s'obtient en attachant des boules de dimension n le long de X^{n-1} ;
3. X a la topologie faible : une partie K de X est fermée si, et seulement si, sa trace sur tous les X^n est fermée.

« Attacher des boules de dimension n le long de X^{n-1} » signifie qu'il existe une application continue $f : Z = \coprod B_i^n \rightarrow X$ telle que $f(Z) \subset X^n$, $f(\partial Z) \subset X^{n-1}$, et X^n s'obtient en recollant X^{n-1} et Z le long de ∂Z , autrement dit que X^n est la somme amalgamée de X^{n-1} et Z en-dessous de ∂Z . Le terme de « CW-complexe » est dû à Whitehead, et signifie « cover finite, weak topology »; il provient de la remarque que le bord d'une n -cellule est recouvert par un nombre fini de m -cellules avec $m < n$.

On appelle n -cellule de X l'image de l'une des boules ouvertes B_i^n . X^n est appelé le n -squelette de X . X est dit *de type fini* s'il a un nombre fini de n -cellules pour tout n , et *fini* s'il a un nombre fini de cellules. Si X et Y sont deux CW-complexes, une application $f : X \rightarrow Y$ est dite *cellulaire* si, pour tout n , $f(X^n) \subset Y^n$.

Exemples, autres que l'exemple trivial du point :

1. tout complexe simplicial est un CW-complexe ;
2. pour tout n , la sphère \mathcal{S}^n est un CW-complexe fini ; leur réunion croissante \mathcal{S}^∞ , munie de la topologie faible (les fermés sont les parties de \mathcal{S}^∞ dont la trace sur \mathcal{S}^n est fermée pour tout n), est un CW-complexe, qui n'est plus que de type fini.

On notera que le produit de deux CW-complexes n'est en général pas un CW-complexe (il n'est pas muni de la topologie faible) ; c'est néanmoins le cas dès que l'un des deux CW-complexes est fini.

2.2 Homologie

On peut définir de façon combinatoire l'homologie d'un CW-complexe : on pose

$$C_n(X) = H_n(X^n, X^{n-1}) = \bigoplus_{n\text{-cellules}} \mathbb{Z}.$$

On considère les applications $C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ données comme dérivations ∂ par la suite exacte longue du triplet $X^{n-2} \subset X^{n-1} \subset X^n$. On remarque aussi que choisir des générateurs de $C_n(X)$ revient à orienter les n -cellules, ce qui permet de définir ces dérivations de façon géométrique.

On admet le résultat suivant :

PROPOSITION – *L'homologie du complexe $C_*(X)$ est canoniquement isomorphe à l'homologie singulière de X . On en déduit le même résultat sur la cohomologie et l'homologie à coefficients en appliquant Hom et \otimes .*

2.3 Propriétés importantes

Le résultat important sur les CW-complexes, qu'on admettra, est le suivant :

LEMME D'APPROXIMATION CELLULAIRE – *Toute application continue entre deux CW-complexes est homotope à une application cellulaire.*

On en déduit la proposition suivante :

PROPOSITION – *Si X et Y sont des CW-complexes et si $f : X \rightarrow Y$ induit des isomorphismes sur les groupes d'homotopie, alors f est une équivalence d'homotopie. En particulier, un CW-complexe dont l'homotopie est triviale est contractile.*

Idée de preuve : on peut, d'après le lemme d'approximation cellulaire, supposer que f est cellulaire. On note I le segment $[0, 1]$, et i_t l'injection de X dans $X \times I$ définie par $x \mapsto (x, t)$. On définit alors le *cylindre* de f par :

$$M_f = (X \times I) \amalg_X Y \quad \text{pour } i_1 : X \longrightarrow X \times I.$$

f étant cellulaire, M_f est un CW-complexe. L'inclusion $Y \hookrightarrow M_f$ est une équivalence d'homotopie, d'où une suite exacte longue :

$$\cdots \longrightarrow \pi_{n+1}(M_f, X, x) \longrightarrow \pi_n(X, x) \xrightarrow{f_*} \pi_n(M_f, x) = \pi_n(Y, f(x)) \longrightarrow \pi_n(M_f, X, x) \longrightarrow \cdots$$

Ceci montre que $\pi_n(M_f, X, x) = 0$ pour tout n . Soit g l'identité de M_f : alors, par récurrence, $g|_{M_f^n}$ est homotope à une application d'image incluse dans X (l'obstruction est dans $\pi_n(M_f, X)$, qui est nul). Ceci montre que M_f se rétracte sur X , d'où le résultat.

2.4 Revêtements galoisiens

Soit $p : Y \rightarrow X$ un revêtement ; son *groupe des automorphismes* est

$$\text{Aut } p = \left\{ \sigma : Y \xrightarrow{\sim} Y, p \circ \sigma = p \right\}.$$

Il agit librement sur la fibre de p dès que Y est connexe ; le revêtement p est dit *galoisien* lorsque les deux espaces X et Y sont connexes et que $\text{Aut } p$ agit transitivement sur la fibre de p . Dans ce cas, le groupe des automorphismes de p , encore appelé *groupe de Galois* de p , est isomorphe au quotient du groupe fondamental de X par celui de Y , un isomorphisme étant donné par le choix d'un point de Y .

Si X, Y, Z sont trois espaces topologiques et si $f : X \rightarrow Z$ et $g : Y \rightarrow Z$ sont deux applications continues, on appelle *produit fibré* de X et Y au-dessus de Z l'espace topologique (fermé de $X \times Y$) :

$$X \times_Z Y = \{(x, y) \in X \times Y, f(x) = g(y)\}.$$

Il vérifie la propriété universelle suivante : pour tout espace topologique T , se donner une application continue $T \rightarrow X \times_Z Y$ revient à se donner deux applications continues $u : T \rightarrow X$ et $v : T \rightarrow Y$ telles que $f \circ u = g \circ v$.

$$\begin{array}{ccccc} T & & & & \\ & \searrow & & & \searrow \\ & & X \times_Z Y & \longrightarrow & X \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ & \swarrow & & & \swarrow \\ & & & & \end{array}$$

(Les flèches de T à X et Y sont respectivement u et v . Les flèches de $X \times_Z Y$ à X et Y sont respectivement l'injection et la projection. Les flèches de X à Z et de Y à Z sont respectivement f et g .)

Si $E \xrightarrow{p} B$ est un revêtement galoisien et si $f : B' \rightarrow B$ alors le produit fibré E_f de B' et E est un revêtement galoisien :

$$\begin{array}{ccc} E_f & \longrightarrow & E \\ \downarrow f^*(p) & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

On dit qu'un espace topologique X est *paracompact* si l'on peut y construire des partitions de l'unité. Par exemple, tout espace compact est paracompact ; tout CW-complexe est paracompact [LW]. On va voir que, si B' est paracompact, alors le revêtement galoisien $E_f \rightarrow B'$ ne dépend que de la classe d'homotopie de f . Soient en effet $f, g : B' \rightarrow B$ homotopes et $h : B' \times I \rightarrow B$ une homotopie de f à g ; on note F le produit fibré de E et $B' \times I$ au-dessus de B :

$$\begin{array}{ccccc} E_f & \longrightarrow & F & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B' & \xrightarrow{0} & B' \times I & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

E_f et E_g sont donc les sections au-dessus de 0 et 1 de $F = E \times_B B' \times I$; B' étant paracompact, on peut relever des trivialisations locales de F en un isomorphisme $E_f \simeq E_g$.

On en déduit que, si B est contractile, tous les revêtements galoisiens de B sont triviaux.

2.5 Espaces d'Eilenberg-Mac Lane

Soit Γ un groupe. On appelle *espace d'Eilenberg-Mac Lane* $K(\Gamma, n)$ un CW-complexe (pointé) X dont le seul groupe d'homotopie non nul est $\pi_n(X)$, qui est égal à Γ . En particulier, X est un $K(G, 1)$ si, et seulement si, $\pi_1(X) = G$ et si le revêtement universel de X est contractile ; dans ce cas, ce revêtement est galoisien de groupe G , et $C_*(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ est une $\mathbb{Z}G$ -résolution libre de \mathbb{Z} . Il revient au même de dire que X est un espace $K(G, 1)$ et de dire qu'il existe un espace contractile \tilde{X} sur lequel G agit discontinûment et librement, tel que $X = \tilde{X}/G$.

Nous aurons également besoin d'une approximation des espaces $K(G, 1)$: on notera ici $K_n(G, 1)$ un espace topologique X tel que $\pi_1(X) = G$ et $\pi_i(X) = 0$ pour $1 \leq i \leq n$.

1. Par exemple, on vérifie aisément que \mathcal{S}^1 est un $K(\mathbb{Z}, 1)$. Plus généralement, si S est un ensemble quelconque, soit $X = \bigvee_S \mathcal{S}^1$ un bouquet de cercles indexé par S , c'est-à-dire des cercles attachés en un point. Alors X est un $K(\mathcal{F}S, 1)$: en effet, $\pi_1(X) = \mathcal{F}S$, et le revêtement universel de X est un arbre, qui est donc contractile.
2. Soit Y le tore $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$: alors $\pi_1(Y) = \mathbb{Z}^n$, et le revêtement universel de Y est \mathbb{R}^n , qui est contractile. Y est donc un $K(\mathbb{Z}^n, 1)$.
3. Un peu plus compliqué : soit $X = \mathbb{R}P^\infty$, la limite croissante des espaces projectifs réels $\mathbb{R}P^n$, munie de la topologie faible. \mathcal{S}^n étant le revêtement universel de $\mathbb{R}P^n$, \mathcal{S}^∞ est le revêtement universel de $\mathbb{R}P^\infty$.

Pour montrer que \mathcal{S}^∞ est contractile, considérons un compact K de \mathcal{S}^∞ , et montrons par l'absurde que K est inclus dans l'une des sphères \mathcal{S}^n . Si ce n'était pas le cas, on pourrait exhiber une suite (x_n) de points de K tels que $x_n \notin \mathcal{S}^n$; la trace de tout sous-ensemble des valeurs de cette suite sur une sphère \mathcal{S}^m étant finie et donc fermée, l'ensemble des valeurs de la suite est fermé et discret. K étant compact, (x_n) est stationnaire, ce qui est absurde.

Les sphères \mathcal{S}^i étant compactes, l'image continue d'une sphère \mathcal{S}^i dans \mathcal{S}^∞ est contenue d'après ce qui précède dans une sphère \mathcal{S}^n , et peut donc être contractée à l'intérieur

d'une sphère un peu plus grande, ce qui montre que l'homotopie de \mathcal{S}^∞ est triviale, et donc que \mathcal{S}^∞ est contractile.

Par conséquent, $\mathbb{R}P^\infty$ est un $K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 1)$.

4. Soient g un entier supérieur à un et G le groupe à $2g$ générateurs $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$ et à une relation $\prod [a_i, b_i] = 1$, où $[a_i, b_i]$ est le commutateur $a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$. Alors G est le groupe fondamental de la surface orientable de genre g , qu'on note Y . Le revêtement universel de Y étant le plan hyperbolique pavé par des polygones à $4g$ côtés, il est contractile, donc Y est un $K(G, 1)$.
5. Soit L le sous-groupe de Lie réel de $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix},$$

et soit G le sous-groupe discret de L constitué des matrices à coefficients dans \mathbb{Z} . L est homéomorphe à \mathbb{R}^d pour $d = n(n-1)/2$, et donc contractile, et puisque G est un sous-groupe discret de L , $L \rightarrow L/G$ est un revêtement galoisien de groupe G . Par conséquent, la variété L/G est un $K(G, 1)$.

6. Soit L le groupe de Lie réel $GL_n(\mathbb{R})$; soit G un sous-groupe discret sans torsion de L . Le raisonnement précédent ne s'applique plus puisque G n'est plus contractile. Par contre, G a une unique classe de conjugaison de sous-groupes compacts maximaux; soit K l'un d'entre eux, par exemple $K = O_n(\mathbb{R})$. L'action de L sur le quotient $X = L/G$ est propre, c'est-à-dire que, pour tout compact C de X , le sous-ensemble de L des g tels que gC rencontre C est compact. Par conséquent, si x est un point de X , alors son stabilisateur est fini, et il existe un voisinage de X disjoint de toutes ses images par G ; on en déduit que $X \rightarrow X/G$ est un revêtement galoisien de groupe G . X s'identifie canoniquement à l'ensemble des formes quadratiques définies positives sur \mathbb{R}^n ; il est convexe, et donc contractile. Par conséquent, X/G est un $K(G, 1)$.

Ceci se généralise à un groupe de Lie L et un sous-groupe discret sans torsion G quelconques. Le seul point non élémentaire est le fait que X soit contractile; on en trouvera par exemple une démonstration dans [Hoch].

2.6 Construction du $K(G, 1)$

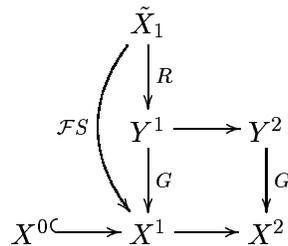
On se propose de démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION – Soit G un groupe; il existe un espace d'Eilenberg-Mac Lane $K(G, 1)$.

L'espace $K(G, 1)$ ainsi construit est, d'après le résultat admis plus haut, unique à homotopie près.

On commence par construire un CW-complexe pointé X de groupe fondamental G . Soient S une partie génératrice de G et $1 \rightarrow R \rightarrow \mathcal{F}S \rightarrow G \rightarrow 1$ une présentation de G par générateurs et relations (G n'a besoin d'être ni de présentation finie ni même de type fini pour que cette construction soit valide); on définit X^0 comme un point x , et X^1 comme un bouquet de

cercles indexé par S , attachés en x ; alors $\pi_1(X^1) = \mathcal{FS}$. Soit \tilde{X}^1 le revêtement universel de X^1 ; c'est l'arbre du groupe libre \mathcal{FS} . On pose $Y^1 = \tilde{X}^1/R$. Alors $\pi_1(Y^1) = R$, et le groupe des automorphismes de $Y^1 \rightarrow X^1$ est $F/R = G$. On rend Y^1 simplement connexe en lui attachant des 2-cellules le long de générateurs de R : on obtient ainsi un CW-complexe Y^2 , qui est simplement connexe. On note X^2 la somme amalgamée de X^1 et Y^2 au-dessous de Y^1 : elle est obtenue en attachant des 2-cellules à X^1 le long de générateurs de R , et $Y^2 \rightarrow X^2$ est un revêtement, qui est simplement connexe; on a donc $\pi_1(X^2) = \text{Aut}(Y^2 \rightarrow X^2)$. Or la fibre de $Y^2 \rightarrow X^2$ est la même que celle de $Y^1 \rightarrow X^1$, soit $F/R = G$; on a donc $\pi_1(X^2) = G$, c'est-à-dire que X^2 est un $K_1(G, 1)$.



Supposons que $X^0 \subset \dots \subset X^n$ soit un $K_{n-1}(G, 1)$, et montrons que l'on peut attacher des $(n + 1)$ -cellules à X^n pour obtenir un $K_n(G, 1)$. Les éléments de $\pi_n(X^n)$ sont des classes d'homotopie d'applications $S^n \rightarrow X^n$; on attache des $(n + 1)$ -cellules à X^n le long de générateurs de $\pi_n(X^n)$ pour obtenir X^{n+1} . On vérifie alors que $\pi_n(X^{n+1}) = 0$.

On a ainsi construit un $K_n(G, 1)$ pour tout n ; on note X leur réunion croissante, munie de la topologie faible. C'est un CW-complexe, et on vient de montrer que c'est un $K(G, 1)$.

2.7 Classifiant ; construction de Milnor

On appelle *classifiant* d'un groupe G un revêtement galoisien $EG \rightarrow BG$ tel que le produit fibré fournisse, pour tout B paracompact, une bijection des classes d'homotopie d'applications $B \rightarrow BG$ vers les revêtements galoisiens de groupe G de B . Un tel espace, s'il existe, est par conséquent unique à équivalence d'homotopie près.

Soit G un groupe; on va construire un classifiant BG de G . Si X et Y sont deux espaces topologiques, on définit leur *jonction* $X \star Y$ comme le quotient de $X \times Y \times I$ par les relations $(x, y, 1) \sim (x', y, 1)$ et $(x, y, 0) \sim (x, y', 0)$. On a deux applications canoniques $X \rightarrow X \star Y, x \mapsto (x, y, 0)$ et $Y \rightarrow X \star Y, y \mapsto (x, y, 1)$; cela permet de définir l'espace $E = G \star G \star \dots$ (où G est muni de la topologie discrète), muni de la topologie faible. E s'identifie à l'ensemble des suites $(t_i g_i)$, où les t_i sont des éléments de I presque tous nuls et de somme 1 et où $g_i \in G$, deux tels éléments étant identifiés si $t_i = t'_i$ et si $g_i = g'_i$ dès que t_i est non nul. On fait agir G à gauche sur E par multiplication sur chaque composante, et on appelle B le quotient E/G . Un argument de partition de l'unité sur des ouverts trivialisant $E \rightarrow B$ [Mil1] montre que tout revêtement galoisien E' sur une base paracompacte B provient d'une application à valeurs dans E commutant à l'action de G , et donc d'une application $\bar{f} : B' \rightarrow B$.

En ne gardant dans E que les facteurs d'indices pairs ou impairs, on construit deux injections $j_0, j_1 : E \hookrightarrow E$, et $h(t, x) = tj_1(x) + (1 - t)j_0(x)$ est une homotopie de j_0 à j_1 . Si

$f_0, f_1 : B' \rightarrow B$ induisent le même revêtement $p' = f_0^*p = f_1^*p$ de B' , notons \widehat{f}_0 et \widehat{f}_1 les applications obtenues par produit fibré avec p , c'est-à-dire en relevant f_0 et f_1 à E' :

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{\widehat{f}_i} & E \\ \downarrow p' & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{f_i} & B \end{array}$$

L'application $h : E' \times I$ définie par $h(x, t) = ti_0(\widehat{f}_0(x)) + (1 - t)i_1(\widehat{f}_1(x))$ est alors une homotopie :

$$\begin{array}{ccccc} E' & \xrightarrow{0} & E' \times I & \xleftarrow{1} & E' \\ \downarrow \widehat{f}_0 & & \downarrow h & & \downarrow \widehat{f}_1 \\ E & \xrightarrow{i_0} & E & \xleftarrow{i_1} & E \end{array}$$

h commutant à G , on obtient ainsi une homotopie \overline{h} de f_0 à f_1 , ce qui prouve le résultat suivant :

PROPOSITION – $E \rightarrow B$ est un classifiant de G ; on le note $EG \rightarrow BG$.

EG est naturellement un CW-complexe ; par compacité, l'image continue d'une sphère S^m est contenue dans un jonction finie $G \star \dots \star G$, et est donc homotopiquement triviale dans une jonction un peu plus grande. EG n'a donc pas d'homotopie, ce qui prouve qu'il est contractile ; par conséquent :

PROPOSITION – BG est un espace $K(G, 1)$.

L'avantage de cette construction sur la construction précédente est qu'elle est évidemment fonctorielle en G . Cette fonctorialité peut également s'interpréter de la façon suivante : soient $\rho : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes, $EG \rightarrow BG$ et $EG' \rightarrow BG'$ des classifiants de G et G' . Alors $E = EG \times EG'$ est contractile, et muni d'une action (diagonale via ρ) de G qui est discontinue et libre ; son quotient $B = E/G$ est donc un $K(G, 1)$, et les deux projections de E vers EG et EG' commutent à l'action de G et passent donc aux quotients. La projection $B \rightarrow BG$ induit l'identité sur le groupe fondamental. C'est donc une équivalence d'homotopie ; elle admet une section, à homotopie près, $BG \rightarrow B$. $B\rho$ est alors la classe d'homotopie de la flèche composée $BG \rightarrow BG'$.

$$\begin{array}{ccccc} EG & \longleftarrow & E = EG \times EG' & \longrightarrow & EG' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ BG & \longleftarrow & B = E/G & \longrightarrow & BG' \\ & & & & \text{---} B\rho \text{---} \end{array}$$

3 Homologie des groupes

3.1 Résolutions

Soient G un groupe et M un G -module ; une *résolution projective* de M est une suite exacte de G -modules :

$$\dots \longrightarrow F_n \longrightarrow \dots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

où les F_i sont des $\mathbb{Z}G$ -modules projectifs. La résolution est dite *libre* si tous les F_i sont des $\mathbb{Z}G$ -modules libres. La *longueur* d'une telle résolution est par définition la borne supérieure des n tels que $F_n \neq 0$. Exemples :

1. si M est un G -module libre, il admet la résolution, de longueur nulle, $0 \rightarrow M \rightarrow M \rightarrow 0$;
2. si $G = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}$, alors, l'idéal d'augmentation étant l'idéal engendré par $T - 1$ dans l'anneau $\mathbb{Z}G = \mathbb{Z}[T, T^{-1}]$, on a une résolution de longueur un : $0 \rightarrow \mathbb{Z}G \xrightarrow{1 \mapsto T^{-1}} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$;
3. si $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}$, on a une résolution infinie : $\dots \rightarrow \mathbb{Z}G \xrightarrow{N} \mathbb{Z}G \xrightarrow{T^{-1}} \mathbb{Z}G \xrightarrow{N} \mathbb{Z}G \xrightarrow{T^{-1}} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$, où $N = 1 + \dots + T^{n-1}$. Il n'existe en fait pas de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -résolution finie de \mathbb{Z} .

PROPOSITION – Soit G un groupe ; il existe une $\mathbb{Z}G$ -résolution libre $\dots \rightarrow F_n \rightarrow \dots \rightarrow F_0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$ de \mathbb{Z} . On construit explicitement cette résolution : on définit F_n comme la représentation

obtenue en linéarisant le G -ensemble G^{n+1} (sous l'action diagonale de G , c'est-à-dire $h \cdot (g_1, \dots, g_n) = (hg_1, \dots, hg_n)$). En d'autres termes, F_n est le \mathbb{Z} -module libre sur les (g_0, \dots, g_n) où $g_i \in G$. On remarque que F_n est un $\mathbb{Z}G$ -module libre dont une base est donnée par les $(1, g_1, g_1g_2, \dots, g_1 \dots g_n)$ pour $(g_1, \dots, g_n) \in G^n$; on note $[g_1] \dots [g_n]$ ces vecteurs de base. Pour tout n et pour $i = 0, \dots, n$, soit $d_i : F_{n+1} \rightarrow F_n$ définie par :

$$d_i(g_0, \dots, g_n) = (g_0, \dots, \widehat{g_i}, \dots, g_n),$$

soit encore :

$$d_i([g_1] \dots [g_n]) = \begin{cases} g_1 [g_2] \dots [g_n] & \text{si } i = 0, \\ [g_1] \dots [g_{i-1}] g_i g_{i+1} [g_{i+2}] \dots [g_n] & \text{si } 0 < i < n, \\ [g_2] \dots [g_{n-1}] & \text{si } i = n. \end{cases}$$

On pose alors $\partial = \sum (-1)^i d_i$; le morphisme de $F_0 = \mathbb{Z}G$ dans \mathbb{Z} est le morphisme d'augmentation ε . L'exactitude de la suite des F_n est laissée en exercice. Cette résolution est appelée la *résolution libre standard* de \mathbb{Z} . Les formules pour les premières dérivations sont : $\partial[] = 1$, $\partial[g] = (g - 1)[]$, $\partial[g|h] = g[h] - [gh] + [g] \dots$

3.2 Homologie

Soient G un groupe et $F \rightarrow \mathbb{Z}$ une $\mathbb{Z}G$ -résolution projective de \mathbb{Z} . On définit l'*homologie* du groupe G par :

$$H_*(G) = H_*(F_G).$$

F_G désigne ici le complexe obtenu à partir de la résolution F en prenant les coinvariants sous l'action de G , c'est-à-dire en tensorisant par \mathbb{Z} . Le produit tensoriel n'étant pas exact, on n'obtient plus une suite exacte mais seulement un complexe. Le foncteur H_* est donc le foncteur dérivé à gauche de $-_G = - \otimes_G \mathbb{Z}$, soit encore : $H_*(G) = \text{Tor}_*^G(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$. Comme toujours, l'homologie ne dépend pas de la résolution choisie.

Quelques exemples :

1. si $G = \mathbb{Z}$, on a la suite exacte $0 \rightarrow \mathbb{Z}G \xrightarrow{T-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$; l'homologie du groupe \mathbb{Z} est donc celle du complexe $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \rightarrow 0$, d'où :

$$H_i(\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 0 \text{ ou } 1, \\ 0 & \text{si } i \geq 2; \end{cases}$$

2. si $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, l'homologie de G est celle du complexe $\cdots \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \rightarrow 0$, soit :

$$H_i(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 0, \\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \text{si } i \text{ est impair,} \\ 0 & \text{si } i \geq 2 \text{ est pair.} \end{cases}$$

3.3 Interprétation topologique

On appelle G -complexe un CW-complexe X muni d'une action de G qui permute les cellules. Dans ce cas, G agit sur les chaînes $C_*(X, \mathbb{Z})$. X est dit *libre* si G agit librement sur les cellules ; dans ce cas, $C_n(X)$ est un $\mathbb{Z}G$ -module libre, dont une base est formée par un système de représentants des cellules (orientées) sous l'action de G .

Soit $p : Y \rightarrow X$ un revêtement galoisien ; on suppose que X est un CW-complexe. Y est alors naturellement muni d'une structure de CW-complexe, les cellules de Y au-dessus d'une cellule e de X étant les composantes connexes de $p^{-1}(e)$. Y est alors un G -complexe libre ; $C_n(Y)$ est donc un $\mathbb{Z}G$ -module libre, dont une base est formée par les cellules de X , et par conséquent $C_n(Y)_G$ s'identifie canoniquement à $C_n(X)$.

Si Y est contractile (ce qui revient, puisque Y est un CW-complexe, à exiger que tous les groupes d'homotopie de Y s'annulent), alors son homologie est celle du point, et $C_*(Y) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$ est par conséquent une $\mathbb{Z}G$ -résolution libre de \mathbb{Z} . Cela revient à dire que X est un $K(G, 1)$, d'où, puisque $C_n(X) = C_n(Y)_G$:

$$H_*(G) = H_*(K(G, 1)).$$

1. Ainsi, puisque $\mathbb{R}P^\infty$ est un $K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 1)$, son homologie est celle de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, soit 0 en degré pair supérieur à deux, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ en degré impair, et \mathbb{Z} en degré 0.
2. De même, puisque le tore $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ est un $K(\mathbb{Z}^n, 1)$, l'homologie de \mathbb{Z}^n est donnée par $H_i(\mathbb{Z}^n) = \bigwedge^i \mathbb{Z}$.
3. Si G est le groupe libre \mathcal{FS} , alors le bouquet de cercles $\bigvee_S \mathcal{S}^1$ est un $K(G, 1)$. Par conséquent :

$$H_i(\mathcal{FS}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 0, \\ \mathbb{Z}S = \mathcal{FS}_{\text{ab}} & \text{si } i = 1, \\ 0 & \text{si } i \geq 2. \end{cases}$$

Les 1-cellules du revêtement universel de $\bigvee_S \mathcal{S}^1$, c'est-à-dire du graphe de \mathcal{FS} sont en bijection avec $\mathcal{FS} \times S$: le graphe étant orienté, toute 1-cellule s'écrit (g, gs) pour $g \in \mathcal{FS}$ et $s \in S$. Les 0-cellules étant simplement les éléments de \mathcal{FS} , la $\mathbb{Z}\mathcal{FS}$ -résolution libre de \mathbb{Z} donnée par le graphe de \mathcal{FS} est donc :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}\mathcal{FS}^{(S)} \xrightarrow{e_s \mapsto s^{-1}} \mathbb{Z}\mathcal{FS} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

4 Homologie et cohomologie avec coefficients

4.1 Homologie

Soit M un G -module ; si F_\star est une $\mathbb{Z}G$ -résolution projective de \mathbb{Z} , alors $F_\star \otimes_G M$ est un complexe de $\mathbb{Z}G$ -modules. On appelle *groupes d'homologie de G à coefficients dans M* les groupes d'homologie de ce complexe ; on les note $H_i(G, M)$ ou encore $\text{Tor}_i^G(\mathbb{Z}, M)$. Ils ne dépendent pas de la résolution F_\star choisie. Dans le cas où $M = \mathbb{Z}$, puisque $N_G = N \otimes_G \mathbb{Z}$, on retrouve l'homologie de G .

Puisque H_\star est un foncteur Tor , si $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ est une suite exacte courte de G -modules, on a une suite exacte longue correspondante en homologie :

$$\cdots \longrightarrow H_n(G, M') \longrightarrow H_n(G, M) \longrightarrow H_n(G, M'') \longrightarrow H_{n-1}(G, M') \longrightarrow \cdots$$

Le produit tensoriel étant exact à droite, on a $H_0(G, M) = M \otimes_G \mathbb{Z} = M_G$.

4.2 Cohomologie

De même, $\mathbf{Hom}(F, M)$ est un complexe de $\mathbb{Z}G$ -modules en degrés négatifs ; on le considère encore comme un complexe en cohomologie en renversant les indices, et on pose $H^i(G, M) = H_{-i}(\mathbf{Hom}(F, M)) = \text{Ext}_G^i(\mathbb{Z}, M)$; on les appelle *groupes de cohomologie de G à coefficients dans M* .

Là encore, si $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ est une suite exacte courte de G -modules, on a une suite exacte longue :

$$\cdots \longrightarrow H^n(G, M') \longrightarrow H^n(G, M) \longrightarrow H^n(G, M'') \longrightarrow H^{n+1}(G, M') \longrightarrow \cdots$$

Hom étant exact à gauche, il vient $H^0(G, M) = \text{Hom}_G(\mathbb{Z}, M) = M^G$.

On peut expliciter le début du complexe de cohomologie à coefficients dans M provenant de la résolution canonique : pour tout n , puisque F_n est la somme directe de G^n copies de $\mathbb{Z}G$, $\text{Hom}_G(F_n, M)$ s'identifie canoniquement à l'ensemble des fonctions de G^n dans M , et la dérivation est, au signe près, $\sum (-1)^i d_i^*$, où

$$\begin{aligned} d_0^* : f &\longmapsto [(g_1, \dots, g_{n+1}) \mapsto g_1 f(g_2, \dots, g_{n+1})] \\ d_i^* : f &\longmapsto [(g_1, \dots, g_{n+1}) \mapsto f(g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_{n+1})] \end{aligned}$$

En notant $\mathcal{F}(X, Y)$ l'ensemble des applications de X dans Y , que j'aurais souhaité noter Y^X , mais cela aurait prêté à confusion avec M^G , le début du complexe est maintenant :

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \mathcal{F}(G, M) \longrightarrow \mathcal{F}(G^2, M) \longrightarrow \dots,$$

où les dérivations successives sont, au signe près :

$$\begin{aligned} \partial_1 : \quad M &\longrightarrow \mathcal{F}(G, M) \\ x &\longmapsto [g \mapsto gx - x], \\ \partial_2 : \quad \mathcal{F}(G, M) &\longrightarrow \mathcal{F}(G^2, M) \\ f &\longmapsto [(g, h) \mapsto f(gh) - gf(h) - f(g)]. \end{aligned}$$

On reconnaît ici les 1-cocycles et 1-cobords auxquels nous sommes habitués.

4.3 Interprétations topologiques

Si X est un $K(G, 1)$, pointé par x , on a vu que $C_n(Y) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$ est une résolution libre de \mathbb{Z} ; si M est un groupe abélien, il est immédiat à partir des définitions que, pour l'action triviale de G sur M , l'homologie et la cohomologie de G à coefficients dans M s'identifient à l'homologie et à la cohomologie singulière de X à coefficients dans M :

$$H_*(G, M) = H_*(X, M) \quad \text{et} \quad H^*(G, M) = H^*(X, M).$$

Si maintenant M n'est plus muni de l'action triviale, il faut élargir un peu la définition ci-dessus et considérer des faisceaux sur X . Le revêtement universel Y de X est contractile, et muni d'une action discontinue et libre de G ; en outre X s'identifie canoniquement au quotient Y/G . Si M est un G -module, on note E le fibré sur X défini par $E = (Y \times M)/G$ et \mathcal{M} le faisceau des sections de E . C'est un faisceau de groupes abéliens localement constant sur X ; on appelle un tel objet un *système local*. Sa fibre en x est M ; on obtient ainsi une équivalence de catégories entre les G -modules et les systèmes locaux sur X , dont le foncteur inverse est le foncteur fibre en x , muni de l'action du groupe fondamental définie par recollement d'ouverts trivialisants :

$$\begin{array}{ccc} G\text{-Mod} & \longleftrightarrow & \text{Loc}(X) \\ M & \longmapsto & \mathcal{M} \\ \mathcal{F}_x & \longleftarrow & \mathcal{F} \end{array} .$$

Cette équivalence de catégories est encore valable sans supposer que Y est contractile.

Puisque le G -module \mathbb{Z} correspond sous cette équivalence de catégories au faisceau constant \mathbb{Z} , le foncteur $-_G = \text{Hom}(\mathbb{Z}, -)$ des G -invariants des G -modules vers les groupes abéliens correspond sous cette équivalence de catégories au foncteur $\Gamma(X, -) = \text{Hom}(\mathbb{Z}, -)$ des sections globales des systèmes locaux sur X :

$$\begin{array}{ccc} G - \text{Mod} & \longleftrightarrow & \text{Loc}(X) . \\ & \searrow \scriptstyle -_G & \swarrow \scriptstyle \Gamma(X, -) \\ & & \text{Mod} \end{array}$$

Ceci permet d'identifier les foncteurs dérivés à droite de ces deux foncteurs, soit :

$$H^q(G, M) = \text{Ext}_{G-\text{Mod}}^q(\mathbb{Z}, M) = \text{Ext}_{\text{Loc}(X)}^q(\mathbb{Z}, \mathcal{M}).$$

Il ne reste plus, pour identifier les groupes de cohomologie de G à coefficients dans M avec ceux du faisceau \mathcal{M} sur X , qu'à montrer que le foncteur dérivé $R\Gamma(X, -)$ calculé dans $\text{Loc}(X)$ est le même que le foncteur dérivé dans la catégorie $\text{Ab}(X)$ de tous les faisceaux (de groupes abéliens) sur X ; on renverra pour cela le lecteur à [Groth]. Il vient finalement, sous l'équivalence de catégories précédente :

$$H^q(G, -) = H^q(X, -).$$

4.4 Exemples

1. Soit par exemple $G = \mathbb{Z}$; alors $\mathbb{Z}G = \mathbb{Z}[T, T^{-1}]$, et on a la résolution projective

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}G \xrightarrow{T-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Si M est un G -module, on en déduit respectivement $M \xrightarrow{T-1} M \rightarrow 0$ et $0 \rightarrow M \xrightarrow{T-1} M$, d'où les seuls groupes d'homologie et de cohomologie non nuls de \mathbb{Z} :

$$H_0(\mathbb{Z}, M) = H^1(\mathbb{Z}, M) = M_G \quad \text{et} \quad H^0(\mathbb{Z}, M) = H_1(\mathbb{Z}, M) = M^G.$$

2. Soit $G = \mathcal{F}S$; on a obtenu par une méthode topologique la résolution libre

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}\mathcal{F}S^{(S)} \xrightarrow{e_s \mapsto s-1} \mathbb{Z}\mathcal{F}S \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

En appliquant $- \otimes_{\mathbb{Z}G} M$ et $\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(-, M)$, on obtient les complexes :

$$0 \longrightarrow M^{(S)} \xrightarrow{x e_s \mapsto (s-1)x} M \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \longrightarrow M \xrightarrow{x \mapsto (s \mapsto (s-1)x)} M^S \longrightarrow 0.$$

3. Soit maintenant $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; on note $\mathbb{Z}G = \mathbb{Z}[T]/(T^n - 1)$, et $N = 1 + \dots + T^{n-1} \in \mathbb{Z}G$. Si M est un G -module, on peut considérer N comme un endomorphisme de M ; alors N est à valeurs dans M^G et se factorise par M_G , d'où une application $\bar{N} : M_G \rightarrow M^G$. On a une résolution libre de \mathbb{Z} :

$$\dots \longrightarrow \mathbb{Z}G \xrightarrow{T-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{N} \mathbb{Z}G \xrightarrow{T-1} \mathbb{Z}G \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Après application de $- \otimes_G M$ ou de $\text{Hom}_G(-, M)$, cette suite devient respectivement :

$$\begin{aligned} \dots &\longrightarrow M \xrightarrow{T-1} M \xrightarrow{N} M \xrightarrow{T-1} M \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow M \xrightarrow{T-1} M \xrightarrow{N} M \xrightarrow{T-1} M \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Ceci donne :

$$H_i(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, M) = \begin{cases} M_G & \text{si } i = 0, \\ \text{coker } \bar{N} = M^G / NG & \text{si } i \text{ est impair,} \\ \ker \bar{N} = \ker N / (T-1)M & \text{si } i \text{ est pair, } i \geq 2, \end{cases}$$

et

$$H^i(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, M) = \begin{cases} M^G & \text{si } i = 0, \\ \ker \bar{N} = \ker N / (T-1)M & \text{si } i \text{ est impair,} \\ \text{coker } \bar{N} = M^G / NG & \text{si } i \text{ est pair, } i \geq 2. \end{cases}$$

Il existe une façon de modifier la définition de la cohomologie des groupes pour avoir des groupes d'homologie et de cohomologie 2-périodiques pour un groupe cyclique ; on renverra pour cela au huitième chapitre de [Serre].

Bibliographie

Pour cet exposé, on pourra consulter [Brown], [Ben], [LW], [Hoch], [Mil1], [Groth], [Serre], [Mil2].

Introduction aux foncteurs dérivés

Joël Riou

Le but de cet exposé est de donner une construction des foncteurs dérivés d'un foncteur entre deux catégories abéliennes. Cette construction généralise d'autres théories cohomologiques comme celles des groupes ou des faisceaux. Nous n'utiliserons pas ici le langage des catégories dérivées qui donnent un "formalisme de l'hyperhomologie" [Ver].

AVERTISSEMENT – *Cet exposé est plus difficile d'accès que les autres exposés du groupe de travail ; il nécessite une certaine habitude de l'algèbre homologique. Son but est de poser le cadre abstrait nécessaire à une vision unifiée d'autres théories cohomologiques.*

1 Catégories abéliennes

Le formalisme des foncteurs dérivés s'étendant naturellement à d'autres catégories que celle des modules sur un anneau, il convient d'introduire les catégories abéliennes pour donner suffisamment de généralité aux constructions qui vont suivre.

DÉFINITION 1 – *Une catégorie \mathcal{C} est dite additive si et seulement si*

- *Pour tous objets X, Y , l'ensemble $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ est muni d'une structure de groupe abélien.*
- *Pour tous objets X, Y, Z , la loi de composition $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$ est bilinéaire.*
- *Les produits finis et les sommes directes finies existent dans \mathcal{C} .*

EXERCICE – *Démontrer que, étant donnée une catégorie \mathcal{C} , il existe au plus une structure de catégorie additive sur \mathcal{C} , c'est-à-dire que, dans une catégorie additive \mathcal{C} , la structure de groupe abélien sur les $\text{Hom}_{\mathcal{C}}$ est "canonique".*

DÉFINITION 2 – *Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme dans une catégorie additive \mathcal{C} . Les objets suivants, s'ils existent, sont définis à isomorphisme canonique près :*

- *Le noyau $\ker f$ de $X \longrightarrow Y$ est la donnée d'un morphisme $\ker f \longrightarrow X$ tel que la composée $\ker f \longrightarrow X \longrightarrow Y$ soit nulle, satisfaisant la propriété universelle suivante : pour tout morphisme $Z \longrightarrow X$ tel que la composée $Z \longrightarrow X \longrightarrow Y$ soit nulle, il existe un unique morphisme $Z \longrightarrow \ker f$ tel que le morphisme $Z \longrightarrow X$ soit le composé de $Z \longrightarrow \ker f$ avec $\ker f \longrightarrow X$.*

- Le conoyau $\text{coker } f$ de $X \rightarrow Y$ est la donnée d'un morphisme $Y \rightarrow \text{coker } f$ tel que la composée $X \rightarrow Y \rightarrow \text{coker } f$ soit nulle, satisfaisant la propriété universelle suivante : pour tout morphisme $Y \rightarrow Z$ tel que la composée $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ soit nulle, il existe un unique morphisme $\text{coker } f \rightarrow Z$ tel que le morphisme $Y \rightarrow Z$ soit le composé de $Y \rightarrow \text{coker } f$ avec $\text{coker } f \rightarrow Z$.
- L'image $\text{im } f$ de $X \rightarrow Y$ est le noyau de $Y \rightarrow \text{coker } f$.
- La coimage $\text{coim } f$ de $X \rightarrow Y$ est le conoyau de $\text{ker } f \rightarrow X$.

LEMME 1 - Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme dans une catégorie additive \mathcal{C} , dont le noyau, le conoyau, l'image et la coimage existent.

Alors il existe un diagramme commutatif canonique :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{ker } f & \xrightarrow{\quad} & X & \xrightarrow{\quad f \quad} & Y & \xrightarrow{\quad} & \text{coker } f \\
 & \searrow 0 & \downarrow & & \uparrow & & \nearrow 0 \\
 & & \text{coim } f & \xrightarrow{\quad \dots \quad} & \text{im } f & &
 \end{array}$$

DÉMONSTRATION - Le morphisme $X \rightarrow Y$ devient nul quand on le compose avec $Y \rightarrow \text{coker } f$, donc par définition de $\text{im } f$, on a un morphisme $X \rightarrow \text{im } f$. La flèche $\text{ker } f \rightarrow X \rightarrow \text{im } f \rightarrow Y$ est nulle par définition de $\text{ker } f$, de plus, par définition $\text{im } f \rightarrow Y$ est un monomorphisme, donc $\text{ker } f \rightarrow \text{im } f$ est nulle, donc par définition de $\text{coim } f$, le morphisme $X \rightarrow \text{im } f$ se factorise pour donner un morphisme $\text{coim } f \rightarrow \text{im } f$. \square

DÉFINITION 3 - Une catégorie additive \mathcal{C} est une catégorie abélienne si et seulement si

- Tout morphisme dans \mathcal{C} possède un noyau et un conoyau
- Pour tout morphisme $f : X \rightarrow Y$, le morphisme canonique $\text{coim } f \rightarrow \text{im } f$ est un isomorphisme.

REMARQUE - Une catégorie additive \mathcal{C} est abélienne si et seulement si sa catégorie opposée \mathcal{C}^{op} est abélienne.

DÉFINITION 4 - Soit \mathcal{C} une catégorie abélienne, une suite de morphismes de \mathcal{C} de la forme

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \text{ est exacte si et seulement si}$$

- $g \circ f = 0$
- L'application canonique $\text{im } f \rightarrow \text{ker } g$ qui s'en déduit est un isomorphisme.

EXEMPLE - Si A est un anneau (non nécessairement commutatif), la catégorie des A -modules à gauche est une catégorie abélienne.

EXEMPLE - Si (X, \mathcal{O}_X) est un espace annelé, la catégorie des faisceaux (ainsi que celle des préfaisceaux) de \mathcal{O}_X -Modules sur X est une catégorie abélienne.

EXEMPLE - Si X est un schéma, la catégorie des \mathcal{O}_X -Modules quasi-cohérents est une catégorie abélienne.

EXEMPLE - Si G est un groupe, la catégorie des G -modules est une catégorie abélienne.

2 Foncteurs dérivés

2.1 Contexte

AVERTISSEMENT – Dans cette partie, toutes les catégories sont supposées abéliennes. De plus, les foncteurs sont supposés additifs (i.e. ils induisent des morphismes de groupes sur les Hom).

Il s'agit ici de présenter la construction des foncteurs dérivés $R^q F$ (resp. $L_q F$) d'un foncteur F entre deux catégories abéliennes, et non de construire le foncteur dérivé total RF (resp. LF) d'un tel foncteur, qui lui se définit au niveau des catégories dérivées...

EXERCICE – Soit F un foncteur entre catégories abéliennes, montrer que F commute aux sommes directes finies, c'est-à-dire que F transforme suites exactes scindées en suites exactes scindées.

Néanmoins, toutes les suites exactes ne sont pas scindées, d'où l'introduction de toutes les notions qui vont suivre.

On dit qu'un foncteur covariant F est exact à gauche s'il transforme une suite exacte $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C$ en une suite exacte $0 \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C)$.

On dit qu'un foncteur covariant F est exact à droite s'il transforme une suite exacte $A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ en une suite exacte $F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow 0$.

On dira qu'il est exact s'il est exact à gauche et exact à droite, ce qui est équivalent à dire qu'il transforme toute suite exacte $A \longrightarrow B \longrightarrow C$ en une suite exacte $F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C)$, ce qui implique que pour tout complexe C_* , on a un isomorphisme canonique $H_*(F(C_*)) = F(H_*(C_*))$.

On adopte la convention suivante : si F est un foncteur contravariant $\mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{D}$, on dit que F est exact (resp. exact à gauche, exact à droite) si et seulement si le foncteur covariant correspondant $\mathcal{C}^{op} \rightsquigarrow \mathcal{D}$ est exact (resp. exact à gauche, exact à droite), où \mathcal{C}^{op} désigne la catégorie opposée à \mathcal{C} .

Si F est un bifoncteur, on dit que F est additif si pour tous objets X et Y , les foncteurs d'une variable $F(X, -)$ et $F(-, Y)$ sont additifs. On définit de même les bifoncteurs exacts, exacts à gauche, exacts à droite (en appliquant la convention précédente pour les questions de variance).

LEMME 2 – Dans toute catégorie abélienne \mathcal{C} , le bifoncteur $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, -)$ de $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C}$ vers les \mathbb{Z} -modules est exact à gauche.

DÉFINITION 5 – Soit X un objet dans une catégorie abélienne \mathcal{C} , X est projectif si et seulement si le foncteur covariant $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -)$ de la catégorie \mathcal{C} vers celle des \mathbb{Z} -modules est exact à droite (donc exact). On dit que X est injectif si et seulement si le foncteur contravariant $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)$ est exact à droite (donc exact).

DÉFINITION 6 – Une catégorie abélienne \mathcal{C} possède assez de projectifs si et seulement si tout objet de \mathcal{C} est un quotient d'un objet projectif. Une catégorie abélienne \mathcal{C} possède assez d'injectifs si et seulement si tout objet de \mathcal{C} est un sous-objet d'un objet injectif.

THÉORÈME 1 – Soit A un anneau (non nécessairement commutatif), alors la catégorie des A -modules à gauche possède assez de projectifs et assez d'injectifs.

DÉMONSTRATION – La proposition concernant les projectifs est évidente, car tout module est quotient d'un module libre, et un module libre est projectif.

Pour les injectifs, montrons tout d'abord que l'on peut se réduire au cas $A = \mathbb{Z}$. Soit M un A -module à gauche, soit $M \xrightarrow{f} I$ un morphisme de groupes abéliens avec I injectif. On munit $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, I)$ d'une structure de module à gauche en posant pour tout $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, I)$ et $\lambda \in A : \forall a \in A \quad (\lambda\varphi)(a) = \varphi(a\lambda)$. Pour tout A -module à gauche N , $\text{Hom}_A(N, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, I)) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A \otimes_A N, I) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, I)$, en munissant A de sa structure canonique de module à droite sur A , donc $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, I)$ est un A -module à gauche injectif.

On définit $\psi : M \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, I)$, en posant $\psi(m)(a) = f(am)$ pour tous $m \in M$ et $a \in A$. ψ est clairement injectif, d'où le résultat.

On peut donc supposer $A = \mathbb{Z}$. On considère le morphisme $\alpha : M \rightarrow (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})}$ (induit par l'évaluation). On peut montrer que $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})}$ est injectif, en procédant exactement comme dans le lemme 5. Il reste à montrer que α est injectif, ce qui n'est pas très difficile, compte tenu de l'injectivité de \mathbb{Q}/\mathbb{Z} . \square

EXERCICE – Montrer que la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur un espace topologique possède suffisamment d'objets injectifs.

2.2 Résolutions

Soit \mathcal{C} une catégorie abélienne.

DÉFINITION 7 – On appelle *résolution homologique* d'un objet X de \mathcal{C} , une suite exacte de la forme :

$$\cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

Cette résolution est dite *projective* si pour tout $i \in \mathbb{N}$, P_i est un objet projectif.

On appelle *résolution cohomologique* d'un objet X de \mathcal{C} , une suite exacte de la forme :

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow I^2 \longrightarrow \cdots$$

Cette résolution est dite *injective* si pour tout $i \in \mathbb{N}$, I^i est un objet injectif.

REMARQUE – Si on a une résolution homologique de X notée P_{\star} , quand on parlera du complexe P_{\star} , celui-ci désignera le complexe $\cdots \longleftarrow 0 \longleftarrow P_0 \longleftarrow P_1 \longleftarrow P_2 \longleftarrow \cdots$, qui est muni d'un morphisme vers le complexe X (au sens usuel de l'inclusion de \mathcal{C} dans la catégorie des complexes), et de même pour les résolutions cohomologiques.

THÉORÈME 2 – Si \mathcal{C} possède assez de projectifs, tout objet possède une résolution projective. Si \mathcal{C} possède assez d'injectifs, tout objet possède une résolution injective.

On suppose maintenant que notre catégorie \mathcal{C} possède assez de projectifs.

THÉORÈME 3 – Soient P_{\star} et Q_{\star} deux complexes gradués par \mathbb{N} dans une catégorie abélienne \mathcal{C} . On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est projectif, et que pour tout $n > 0$, $H_n(Q_{\star}) = 0$.

Alors, pour tout morphisme $\varphi : H_0(P_\star) \rightarrow H_0(Q_\star)$, il existe un morphisme de complexes, unique à homotopie près, $P_\star \rightarrow Q_\star$ induisant φ sur H_0 .

REMARQUE – On a bien entendu un énoncé analogue pour les résolutions injectives, ce qui peut se démontrer en remarquant que si \mathcal{C} est une catégorie abélienne, alors la catégorie opposée \mathcal{C}^{op} est aussi une catégorie abélienne, et dans ce contexte, les objets injectifs de \mathcal{C} se correspondent avec les objets projectifs de \mathcal{C}^{op} .

Le fait que l'on puisse relever les morphismes en des morphismes de résolutions projectives est essentiel, c'est précisément ce qui va permettre de définir de nouveaux foncteurs.

Notons \mathbf{P} la sous-catégorie pleine de $\mathcal{K}(\mathcal{C})$ (catégorie des complexes dans \mathcal{C} gradués par \mathbb{Z} , modulo homotopies) définie par $\mathbf{P} = \left\{ X_\star \in \mathcal{K}(\mathcal{C}), \begin{array}{l} \forall n < 0 \quad X_n = 0 \\ \forall n > 0 \quad H_n(X_\star) = 0 \\ \forall n \quad X_n \text{ est projectif} \end{array} \right\}$

COROLLAIRE – $H_0 : \mathbf{P} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}$ est une équivalence de catégories.

On note $\mathcal{R} : \mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}$ un quasi-inverse de cette équivalence de catégories. Il s'agit donc d'un foncteur qui à un objet X de \mathcal{C} associe une résolution projective de X .

2.3 Construction

DÉFINITION 8 (FONCTEURS DÉRIVÉS À GAUCHE D'UN FONCTEUR COVARIANT)

– Soit F un foncteur covariant de \mathcal{C} vers une catégorie abélienne \mathcal{D} . On note $L_\star F = H_\star(F(\mathcal{R}(-)))$ qui est un foncteur de \mathcal{C} vers les \mathcal{D} -objets gradués par \mathbb{N} . On appelle $L_n F$ le n -ième foncteur dérivé à gauche de F . $\mathcal{R}(X)$ étant muni canoniquement d'un morphisme vers le complexe X , on a un morphisme canonique $L_0 F \xrightarrow{\sim} F$, et ce morphisme est un isomorphisme de foncteurs si et seulement si F est exact à droite.

De plus, si $F \xrightarrow{\sim} G$ est un morphisme de foncteurs, on a des morphismes canoniques de foncteurs $L_n F \xrightarrow{\sim} L_n G$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

REMARQUE – On peut aussi définir les foncteurs dérivés à gauche d'un foncteur contravariant, mais pour cela, on utilise des résolutions injectives, les foncteurs dérivés à droite d'un foncteur covariant, mais pour cela, on utilise des résolutions injectives, les foncteurs dérivés à droite d'un foncteur contravariant, mais pour cela, on utilise des résolutions projectives. On note $R^\star F$ les foncteurs dérivés à droite de F .

EXEMPLE – Soit N un A -module à gauche, on note F le foncteur $- \otimes N$, qui est exact à droite. Dans ce cas, on note $L_n F = \text{Tor}_n^A(-, N)$. Soit N un A -module à gauche, on note F le foncteur $\text{Hom}_A(-, N)$ qui est exact à gauche. Dans ce cas, on note $R_n F = \text{Ext}_A^n(-, N)$. On dit que N est plat si et seulement si $- \otimes_A N$ est exact c'est-à-dire $\text{Tor}_1^A(-, N) = 0$, c'est-à-dire $\text{Tor}_n^A(-, N) = 0$ pour $n \geq 1$.

Les foncteurs dérivés sont utiles pour étudier les foncteurs qui ne sont pas exacts (sinon ces foncteurs dérivés sont évidemment nuls), et leur intérêt résulte notamment du théorème suivant :

THÉORÈME 4 (LONGUE SUITE EXACTE DES FONCTEURS DÉRIVÉS) – Soit F un foncteur covariant $\mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{D}$.

Soit $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ une suite exacte dans \mathcal{C} . Alors, il existe une suite exacte fonctorielle

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow L_1 F(M') \longrightarrow L_1 F(M) \longrightarrow L_1 F(M'') \longrightarrow \\ \longrightarrow L_0 F(M') \longrightarrow L_0 F(M) \longrightarrow L_0 F(M'') \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

(Si F est exact à droite, on peut remplacer $L_0 F$ par F .)

DÉMONSTRATION – L'idée est de construire (exercice) une suite exacte

$$0 \longrightarrow P'_\star \longrightarrow P_\star \longrightarrow P''_\star \longrightarrow 0$$

où P_\star , P'_\star et P''_\star sont respectivement des résolutions projectives de M , M' , et M'' . Ensuite, la suite exacte est tout simplement la longue suite exacte homologique de cette suite exacte de complexes.

Il faut ensuite montrer que la suite exacte ainsi définie ne dépend pas des résolutions projectives choisies, et qu'un morphisme de suites exactes dans \mathcal{C} donne lieu à un morphisme de suites exactes longues. Pour cela, il suffit de montrer que si l'on a un morphisme de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

et deux suites exactes de résolutions de (M, M', M'') et de (N, N', N'') , alors le morphisme de suites exactes se relève (exercice plus ardu) en un morphisme de suites exactes de résolutions projectives...

En appliquant ceci avec $M = N$, $M' = N'$, $M'' = N''$, on obtient que la suite exacte longue est indépendante des résolutions, et le cas général implique alors que cette suite exacte bien définie est effectivement fonctorielle. \square

On a bien entendu un analogue du théorème précédent pour les foncteurs dérivés à droite.

THÉORÈME 5 (LONGUE SUITE EXACTE DES FONCTEURS DÉRIVÉS) – Soit F un foncteur covariant $\mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{D}$.

Soit $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ une suite exacte dans \mathcal{C} . Alors, il existe une suite exacte fonctorielle

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow R^0 F(M') \longrightarrow R^0 F(M) \longrightarrow R^0 F(M'') \longrightarrow \\ \longrightarrow R^1 F(M') \longrightarrow R^1 F(M) \longrightarrow R^1 F(M'') \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

(Si F est exact à gauche, on peut remplacer $R^0 F$ par F .)

2.4 Bifoncteurs

Si F est un bifoncteur (covariant en les deux variables) *exact à droite*, on peut définir les foncteurs dérivés à gauche de $F(X, -)$ pour tout objet X , et les foncteurs dérivés à gauche de $F(-, Y)$. On a le théorème suivant :

THÉORÈME 6 – *On suppose que pour tout objet projectif P , $F(P, -)$ est exact, et que pour tout objet projectif Q , $F(-, Q)$ est exact.*

Soient X et Y deux objets, il existe un isomorphisme canonique entre $L_n F(X, -)(Y)$ et $L_n F(-, Y)(X)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Sous ces hypothèses, $L_n F$ est un bifoncteur.

DÉMONSTRATION – En considérant le bicomplexe obtenu en appliquant le bifoncteur F à une résolution projective de X et une résolution projective de Y , on peut construire *à la main* des morphismes entre les deux façons de définir de $L_\star F$, et on vérifie *aussitôt* qu'ils sont inverses l'un de l'autre.

En utilisant des suites spectrales, on montre que l'on peut définir $L_\star F$ comme étant l'homologie totale de ce bicomplexe, et que les termes limites (qui ici sont situés soit sur une unique colonne soit sur une unique ligne) des suites spectrales associées aux deux filtrations usuelles correspondent aux deux définitions précédentes de $L_\star F$, d'où le résultat. \square

REMARQUE – On a des énoncés analogues pour des bifoncteurs covariants en une variable et contravariant en l'autre, ou tout autre combinaison possible...

Ainsi, pour résumer, on peut calculer $\mathrm{Tor}_n^A(M, N)$ en utilisant, au choix, une résolution projective de M ou une résolution projective de N (on utilise ici le théorème précédent en remarquant qu'un module projectif est plat), et on peut calculer $\mathrm{Ext}_A^n(M, N)$ en utilisant, au choix, une résolution projective de M ou une résolution injective de N .

2.5 Résolutions acycliques

Soit $F : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{D}$ un foncteur covariant exact à gauche entre catégories abéliennes, \mathcal{C} possédant assez d'injectifs. Pour définir $R^q F(X)$, on a utilisé une résolution injective de X , mais les objets injectifs sont souvent difficile à décrire, bien qu'ils aient le mérite d'exister.

D'après le théorème 3, si J^\star est une résolution cohomologique de X , on a un morphisme canonique, pour tout $q \in \mathbb{N}$, $H^q(F(J^\star)) \longrightarrow R^q F(X)$.

DÉFINITION 9 – *Soit J un objet de \mathcal{C} , on dit que J est F -acyclique si et seulement si pour tout $q > 0$, $R^q F(J) = 0$.*

On appelle résolution F -acyclique d'un objet X une résolution de X ne comprenant que des objets F -acycliques.

Un complexe est dit F -acyclique s'il ne comprend que des objets F -acycliques.

THÉORÈME 7 – *Soit \mathcal{A}^\star une résolution F -acyclique de X dans \mathcal{C} .*

Alors, pour tout $q \geq 0$, le morphisme canonique $H^q(F(\mathcal{A}^\star)) \longrightarrow R^q F(X)$ est un isomorphisme.

DÉMONSTRATION – Cela découle très facilement des suites spectrales associées à une résolution de Cartan-Eilenberg du complexe \mathcal{A}^\star ...

Sinon, sans suites spectrales, on procède par récurrence sur q . Pour $q = 0$, l'isomorphisme est dû uniquement à l'exactitude à gauche de F . Par hypothèse de récurrence, on a un isomorphisme $H^{q+1}(F(\mathcal{A}^*)) = R^q F(\mathcal{A}^0/X)$. La suite exacte longue des foncteurs dérivés appliquée à la suite exacte courte $0 \longrightarrow X \longrightarrow \mathcal{A}^0 \longrightarrow \mathcal{A}^0/X \longrightarrow 0$ donne $R^q F(\mathcal{A}^0/X) = R^{q+1} F(X)$, d'où le résultat à condition de vérifier que l'isomorphisme $H^{q+1}(F(\mathcal{A}^*)) = R^{q+1} F(X)$ est induit par le morphisme annoncé. \square

REMARQUE – On obtient sans difficulté des résultats analogues pour des foncteurs contravariants et/ou exacts à droite.

2.6 Foncteurs dérivés et homologie

THÉORÈME 8 – Soit C_\star un complexe de chaînes et F un foncteur additif.

- Si F est covariant, exact à gauche, vérifie $R^2 F = 0$ et si C_\star est F -acyclique, il existe une suite exacte fonctorielle

$$0 \longrightarrow R^1 F(H_{q+1}(C_\star)) \longrightarrow H_q(F(C_\star)) \longrightarrow F(H_q(C_\star)) \longrightarrow 0$$

- Si F est covariant, exact à droite, vérifie $L_2 F = 0$ et si C_\star est F -acyclique, il existe une suite exacte fonctorielle

$$0 \longrightarrow F(H_q(C_\star)) \longrightarrow H_q(F(C_\star)) \longrightarrow L_1 F(H_{q-1}(C_\star)) \longrightarrow 0$$

- Si F est contravariant, exact à gauche, vérifie $R^2 F = 0$ et si C_\star est F -acyclique, il existe une suite exacte fonctorielle

$$0 \longrightarrow R^1 F(H_{q-1}(C_\star)) \longrightarrow H^q(F(C_\star)) \longrightarrow F(H_q(C_\star)) \longrightarrow 0$$

- Si F est contravariant, exact à droite, vérifie $L_2 F = 0$ et si C_\star est F -acyclique, il existe une suite exacte fonctorielle

$$0 \longrightarrow F(H_q(C_\star)) \longrightarrow H^q(F(C_\star)) \longrightarrow L_1 F(H_{q+1}(C_\star)) \longrightarrow 0$$

DÉMONSTRATION – On considère le cas où F est covariant et exact à gauche (par exemple le foncteur considéré dans l'exercice 9.2).

On note B_\star le sous-complexe de C_\star formé des bords, Z_\star le sous-complexe de C_\star formé des cycles.

Notons $\tilde{Z}_\star = C_\star/Z_\star$ et $\tilde{B}_\star = C_\star/B_\star$. On remarque que \tilde{B}_\star possède un opérateur de bord nul, par conséquent \tilde{Z}_\star qui en est un quotient aussi.

On a deux suites exactes courtes de complexes, qui donnent lieu à des longues suites exactes des foncteurs dérivés (degré par degré).

$$0 \longrightarrow \tilde{Z}_\star[+1] \xrightarrow{d} C_\star \longrightarrow \tilde{B}_\star \longrightarrow 0 \qquad 0 \longrightarrow H_\star \longrightarrow \tilde{B}_\star \longrightarrow \tilde{Z}_\star \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow F\tilde{Z}_{n+1} \xrightarrow{d} FC_n \longrightarrow F\tilde{B}_n \longrightarrow R^1F\tilde{Z}_{n+1} \longrightarrow R^1FC_n \longrightarrow R^1F\tilde{B}_n \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow FH_n \longrightarrow F\tilde{B}_n \longrightarrow F\tilde{Z}_n \longrightarrow R^1FH_n \longrightarrow R^1F\tilde{B}_n \longrightarrow R^1F\tilde{Z}_n \longrightarrow 0$$

Comme C_\star est F -acyclique, on obtient successivement que $R^1F\tilde{B}_n = 0$ pour tout n et que $R^1F\tilde{Z}_n = 0$ pour tout n .

Le résultat final s'obtient en transformant en suites exactes courtes la longue suite exacte d'homologie de la suite exacte courte de complexes suivante (dont les termes extrémaux ont des opérateurs de bord nuls) :

$$0 \longrightarrow F\left(\tilde{Z}_\star[+1]\right) \xrightarrow{d} F(C_\star) \longrightarrow F\left(\tilde{B}_\star\right) \longrightarrow 0$$

□

REMARQUE – Pour démontrer les autres cas, soit on procède comme ci-dessus, soit au lieu de considérer \tilde{Z}_\star et \tilde{B}_\star , on considère les suites exactes faisant intervenir Z_\star et B_\star . Pour le cas ci-dessus, on pourrait également utiliser directement Z_\star et B_\star , mais la démonstration serait nettement plus technique...

Ce fait résulte (à mon avis) de propriétés “surprenantes” reliant une catégorie abélienne à sa catégorie opposée (abélienne également).

3 Lien entre les extensions et $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1$

Soit \mathcal{C} une catégorie abélienne possédant suffisamment d'injectifs. On rappelle la définition suivante qui généralise la définition du bifoncteur Ext^q défini précédemment dans la catégorie des A -modules.

DÉFINITION 10 – Pour tous objets X et Y dans \mathcal{C} , on note $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^q(X, Y) = R^q \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -)(Y)$.

EXERCICE – Munir $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^q$ d'une structure de bifoncteur contravariant en la première variable et covariant en la seconde, en utilisant les résultats sur les foncteurs dérivés des bifoncteurs.

DÉFINITION 11 – Pour tous objets X et Y dans \mathcal{C} , on considère les suites exactes courtes de la forme suivante, que l'on appelle extensions de X par Y :

$$(\xi) \quad 0 \longrightarrow Y \longrightarrow E \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

On dit que deux extensions (ξ) et (ξ') sont équivalentes si et seulement s'il existe un diagramme commutatif (qui induit nécessairement un isomorphisme par le lemme des cinq) de la forme :

$$\begin{array}{ccccccc}
 (\xi) & 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & E & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \parallel & & \downarrow \simeq & & \parallel & & \\
 (\xi') & 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

On désigne par $\text{Ext}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ l'ensemble constitué par les extensions modulo cette relation d'équivalence (la description qui va suivre prouvera qu'il s'agit bien d'un ensemble).

THÉORÈME 9 – Il existe une bijection canonique entre $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, Y)$ et $\text{Ext}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

DÉMONSTRATION – Choisissons un début de résolution injective de Y :

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_2$$

Soit (ξ) une extension, considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 (\xi) & 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & E & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \parallel & & \downarrow f & & & & \\
 & & & Y & \longrightarrow & I_0 & \longrightarrow & I_1 & \longrightarrow & I_2
 \end{array}$$

Par injectivité de I_1 , il existe un morphisme $f : E \rightarrow I_0$ rendant le diagramme précédent commutatif.

On remarque que la composée de f par $I_0 \rightarrow I_1$ induit par passage au quotient par Y un morphisme $f' : X \rightarrow I_1$, dont la composée avec $I_1 \rightarrow I_2$ est nulle.

On obtient ainsi le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 (\xi) & 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & E & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \parallel & & \downarrow f & & \downarrow f' & \searrow 0 & \\
 & & & Y & \longrightarrow & I_0 & \longrightarrow & I_1 & \longrightarrow & I_2
 \end{array}$$

Montrons que la classe $[f'] \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, Y)$ ne dépend pas du f choisi. Soit \tilde{f} un second relèvement. $f - \tilde{f}$ est nul sur Y , donc donne un morphisme $h : X \rightarrow I_0$. Par suite, la différence entre f' et \tilde{f}' est égale à la composée de h avec $I_0 \rightarrow I_1$, donc f' et \tilde{f}' ont la même classe dans $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, Y)$.

Moyennant un choix de résolution injective de Y , on a construit une application $\alpha : \text{Ext}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, Y)$, mais la démonstration du fait que cette application est bien définie a pour conséquence que cette application ne dépend en fait pas de la résolution injective de Y .

Construisons une application inverse pour α . Soit $\varphi : X \rightarrow I_1$ un cocycle, c'est-à-dire que la composée de φ avec $I_1 \rightarrow I_2$ est nulle.

On peut construire un produit fibré E pour obtenir un diagramme cartésien :

$$\begin{array}{ccc}
 E & \longrightarrow & X \\
 \downarrow & & \downarrow \varphi \\
 I_0 & \longrightarrow & I_1
 \end{array}$$

On définit un morphisme $Y \rightarrow E$, de telle sorte que $Y \rightarrow E \rightarrow X$ soit nul et que $Y \rightarrow E \rightarrow I_0$ soit le morphisme intervenant dans la résolution injective de Y choisie. On peut vérifier que la suite $0 \rightarrow Y \rightarrow E \rightarrow X \rightarrow 0$ est exacte, et on associe à φ la classe de cette extension (ξ_φ) dans $\text{Ext}_C(X, Y)$, et vérifier que cette application induit bien une application $\beta : \text{Ext}_C(X, Y) \rightarrow \text{Ext}_C^1(X, Y)$, c'est-à-dire que la classe de (ξ_φ) ne dépend que de la classe $[\varphi] \in \text{Ext}_C^1(X, Y)$.

Par construction, il est clair que α et β sont des bijections inverses l'une de l'autre. \square

4 Semi-simplicité, Ext-dimension

4.1 Modules semi-simples

Soit A un anneau (non nécessairement commutatif).

DÉFINITION 12 – On considère toutes les suites exactes de A -modules (sous-entendu à gauche) :

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

On dit que M'' est projectif si et seulement si la suite exacte se scinde quels que soient M et M' .

On dit que M' est injectif si et seulement si la suite exacte se scinde quels que soient M et M'' .

On dit que M est semi-simple si et seulement si la suite exacte se scinde quels que soient M' et M'' .

REMARQUE – Cela donne une autre définition des modules projectifs et injectifs, on verra l'équivalence avec la définition donnée précédemment dans le lemme 4.

DÉFINITION 13 – Un A -module V est simple si et seulement si V possède exactement deux sous-modules : 0 et V .

LEMME 3 (SCHUR) – Si V et W sont deux modules simples, un morphisme de V dans W est soit nul soit un isomorphisme. En particulier, les endomorphismes d'un module simple forment un corps (non nécessairement commutatif).

DÉMONSTRATION – L'image d'un tel morphisme est soit nul soit W , si le morphisme est non nul, il est surjectif, mais alors, son noyau est différent de V , donc c'est 0 . \square

THÉORÈME 10 – Soit M un A -module, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. M est semi-simple
2. M est somme de ses sous-modules simples
3. M est somme directe de modules simples

DÉMONSTRATION – 3. \Rightarrow 2.) évident.

2. \Rightarrow 3.) On choisit une famille maximale (Zorn) de sous-modules simples de M en somme directe. Notons W la somme directe de cette famille. Si V est un sous-module simple de M , soit $V \subset W$, soit $V \cap W = 0$, auquel cas la famille ne serait pas maximale.

2.3. \Rightarrow 1.) M est somme de ses sous-modules simples, si N est un quotient de M , N est aussi somme de ses sous-modules simples (il est engendré par les images non triviales des sous-modules simples de M). Dans l'implication précédente, on peut choisir les modules simples intervenant dans une décomposition en modules simples parmi une famille de modules simples engendrant le module, ici, pour N on prend les images non triviales des sous-modules simples de M intervenant dans une décomposition $M = \bigoplus_{i \in I} V_i$. On se retrouve ainsi avec une sous-famille W_j , $j \in J \subset I$. On a $N = \bigoplus_{j \in J} W_j$ avec $V_j \simeq W_j$ isomorphisme induit par $M \rightarrow N$. On dispose ainsi d'une section $N \rightarrow M$ définie par $W_j \rightarrow V_j$ (l'isomorphisme réciproque du précédent). Donc M est semi-simple.

1. \Rightarrow 3.) Commençons par montrer que tout module semi-simple non nul contient un module simple. Par semi-simplicité, il suffit de montrer que tout module semi-simple non nul admet un sous-quotient simple. Prenons alors un sous-module monogène non nul de M isomorphe à A/I , avec I idéal à gauche de A . On peut considérer un idéal \mathfrak{m} à gauche contenant I , ne contenant 1 et maximal pour cette propriété (Zorn). A/\mathfrak{m} est clairement simple, et c'est un quotient de A/I . Maintenant, notons W le sous-module de M engendré par tous les modules simples contenus dans M . M/W est isomorphe à un supplémentaire de W dans M , et, si $M/W \neq 0$, M/W contient un module simple, d'où une contradiction, d'où $M = W$. \square

LEMME 4 – *Un module M est projectif si et seulement si $\text{Hom}_A(M, -)$ est exact c'est-à-dire si $\text{Ext}_A^1(M, -) = 0$ c'est-à-dire si $\text{Ext}_A^n(M, -) = 0$ pour tout $n \geq 1$.*

Un module M est injectif si et seulement si $\text{Hom}_A(-, M)$ est exact c'est-à-dire si $\text{Ext}_A^1(-, M) = 0$ c'est-à-dire si $\text{Ext}_A^n(-, M) = 0$ pour tout $n \geq 1$.

DÉMONSTRATION – Il s'agit de montrer l'équivalence entre les diverses définitions.

Pour les projectifs, soit M un projectif au sens de la définition 12, on sait qu'il existe une surjection d'un projectif X (au sens usuel, c'est-à-dire que $\text{Hom}_A(X, -)$ est exact) vers M . Or, cette suite se scinde, donc M est facteur direct de X , donc le foncteur $\text{Hom}_A(M, -)$ est exact (puisqu'un "facteur direct" d'un foncteur exact est exact).

Le même argument vaut pour les injectifs. \square

LEMME 5 – *Soit N un A -module à gauche, alors N est injectif si et seulement si pour tout idéal I à gauche, $\text{Ext}_A^1(A/I, N) = 0$.*

DÉMONSTRATION – En utilisant la longue suite exacte des foncteurs dérivés à la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow A/I \longrightarrow 0$$

on obtient que $\text{Ext}_A^1(A/I, N) = 0$ si et seulement si l'application canonique $\text{Hom}_A(A, N) \rightarrow \text{Hom}_A(I, N)$ est surjective.

Supposons que cette condition soit vérifiée par N pour tout idéal à gauche I de A . Soit $M' \subset M$ une inclusion de A -modules. Soit φ un morphisme de M' dans N , il faut montrer que l'on peut prolonger ce morphisme à M tout entier. D'après le lemme de Zorn, il existe un prolongement maximal. Donc, il suffit de montrer que si $M' \subsetneq M$, il existe un prolongement

strict de φ . Soit x un élément de $M - M'$. Pour démontrer ce que l'on veut, on peut supposer que $M = M' + Ax$. Se donner un prolongement de φ à M' revient à se donner un morphisme de $Ax \subset M$ dans N dont la restriction à $M' \cap Ax \subset M'$ coïncide avec celle de φ . On peut donc supposer que M est monogène. Maintenant, $M' \simeq A/J$ et $M \simeq I/J$, avec $J \subset I$ deux idéaux à gauche de A . Le quotientage par J est innocent pour la question du prolongement, donc on peut supposer que $M = A$ et que M' est un idéal à gauche I de A . Or, dans ce cas, c'est exactement l'hypothèse de départ. \square

COROLLAIRE – *Si A est un anneau principal, un module est injectif si et seulement s'il est divisible.*

4.2 Ext-dimension

Soit A un anneau (non nécessairement commutatif).

DÉFINITION 14 – *On note $\text{Ext} - \text{Dim}(A) = \sup \{n \in \mathbb{N}, \exists M, N \quad \text{Ext}_A^n(M, N) \neq 0\}$.*

THÉORÈME 11 – *Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $\text{Ext} - \text{Dim}(A) \leq n$
2. $\text{Ext}_A^{n+1}(M, N) = 0$ pour tous modules M et N .
3. Tout A -module M possède une résolution projective de la forme

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

4. Pour tout A -module M , si $P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ est exacte avec P_i projectifs, le noyau de $P_{n-1} \longrightarrow P_{n-2}$ est projectif.
5. Tout A -module M possède une résolution injective de la forme

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I^0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I^n \longrightarrow 0$$

6. Pour tout A -module M , si $0 \longrightarrow M \longrightarrow I^0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I^n \longrightarrow 0$ est exacte avec I^i injectifs, le conoyau de $I^{n-2} \longrightarrow I^{n-1}$ est injectif.
7. Pour tout idéal (à gauche) I et tout module N , $\text{Ext}_A^{n+1}(A/I, N) = 0$

DÉMONSTRATION – Les implications suivantes sont triviales : 4. \Rightarrow 3. \Rightarrow 1. \Rightarrow 2. \Rightarrow 7.), 6. \Rightarrow 5. \Rightarrow 1.).

Démontrons maintenant l'implication 2. \Rightarrow 4.. Sous les notations de 4.), notons K_i le noyau de P_i dans P_{i-1} pour $i \geq -1$, avec la convention $K_{-1} = M$. Pour tout $0 \leq i \leq n-1$, on a une suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow K_i \longrightarrow P_i \longrightarrow K_{i-1} \longrightarrow 0$$

Soit N un A -module, quand on applique le foncteur $\text{Hom}_A(-, N)$, on obtient, grâce à la longue suite exacte des foncteurs dérivés, pour tout $j \geq 1$, un isomorphisme $\text{Ext}_A^j(K_i, N) \simeq \text{Ext}_A^{j+1}(K_{i-1}, N)$. En particulier, $\text{Ext}_A^1(K_{n-1}, N) \simeq \cdots \simeq \text{Ext}_A^{n+1}(M, N) = 0$. Donc K_{n-1} est projectif.

On peut faire exactement de même pour démontrer que 2. \Rightarrow 6.). Mais on a même mieux, on démontre de même que 7. \Rightarrow 6.), en effet pour vérifier que le conoyau C de $I^{n-2} \rightarrow I^{n-1}$ est injectif, il suffit, d'après le lemme 5, de vérifier que $\text{Ext}_A^1(A/I, C) = 0$ pour tout idéal I . \square

COROLLAIRE – Si A est un anneau principal, $\text{Ext} - \text{Dim}(A) \leq 1$.

DÉMONSTRATION – Il s'agit d'un corollaire du corollaire 4.1. En effet, si on plonge un module dans un module injectif, le conoyau est divisible, donc injectif. \square

4.3 Ext-dimension 0 : théorème de Wedderburn

DÉFINITION 15 – Un anneau est semi-simple si et seulement s'il est de Ext-dimension 0.

EXERCICE – Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. A est semi-simple
2. Toute suite exacte de A -modules se scinde
3. Tout A -module est injectif
4. Tout A -module est projectif
5. Tout A -module est semi-simple
6. $\text{Ext}_A^n(-, -) = 0$ pour tout $n \geq 1$
7. $\text{Ext}_A^1(-, -) = 0$
8. $\text{Ext}_A^1(A/I, -) = 0$ pour tout idéal à gauche I .
9. Tout idéal à gauche I est engendré par un idempotent, c'est-à-dire qu'il existe e dans A tel que $e^2 = e$ et $I = Ae$.

DÉFINITION 16 – Si A est un anneau, on note A^{op} son anneau opposé : la structure de groupe abélien est la même que celle de A , mais si l'on note xy le produit dans A et $x.y$ le produit dans A^{op} , on a, par définition : $x.y = yx$.

THÉORÈME 12 (WEDDERBURN) – Soit A un anneau, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. A est semi-simple
2. A est semi-simple comme A -module
3. A est isomorphe à un produit fini d'algèbres de la forme $\text{End}_K(V)$ où V est un K -espace vectoriel de dimension finie, et K un corps (non nécessairement commutatif).

Plus précisément, si tel est le cas, A ne possède qu'un nombre fini de classes d'isomorphismes de modules simples $V_i, i \in I$. $A \simeq \bigoplus_{i \in I} C_i$, avec $C_i \simeq V_i^{n_i}$. Notons $K_i = \text{End}_A(V_i)$ qui est un corps. V_i est un K_i -espace vectoriel de dimension n_i . L'action de A sur V_i est K_i -linéaire, et le morphisme suivant est un isomorphisme :

$$A \longrightarrow \prod_{i \in I} \text{End}_{K_i}(V_i)$$

DÉMONSTRATION – 1. \Rightarrow 2.) clair.

3. \Rightarrow 1.) On sait que se donner un module sur un produit fini d'anneaux équivaut à se donner un module sur chacun de ces anneaux, donc pour démontrer cette implication on peut supposer que A est isomorphe à une algèbre de matrices.

Soit k un corps (non nécessairement commutatif), et V un k -espace vectoriel (à gauche) de dimension finie. Posons $A = \text{End}_k(V)$. Pour démontrer que A est semi-simple, il va suffir de démontrer que tout idéal à gauche de A est engendré par un idempotent.

LEMME 6 – A est noethérien à gauche.

DÉMONSTRATION – Un choix de base de l'espace vectoriel V donne un isomorphisme de A avec $\mathcal{M}_n(k^{op})$. Ainsi, A est un module à gauche sur le sous-anneau des matrices diagonales. Les idéaux à gauche de A vont donc être des espaces vectoriels sur k^{op} de dimension majorée par n^2 , d'où le résultat. \square

LEMME 7 – Soient f et g des éléments de A , il existe un idempotent h dans l'idéal à gauche engendré par f et g tel que $\ker h \subset \ker f \cap \ker g$.

DÉMONSTRATION – Notons $U = \ker f \cap \ker g$, soit W un supplémentaire de U dans $\ker f$, W' un supplémentaire de U dans $\ker g$ (comme k espaces vectoriels). Soit C un supplémentaire de $\ker f + \ker g = U \oplus W \oplus W'$ dans V . Quitte à multiplier à gauche par des éléments inversibles de A , on peut supposer que dans la décomposition $V = U \oplus W \oplus W' \oplus C$, f et g ont des matrices de la forme suivante, et on définit φ comme suit :

$$f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \varphi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On pose $h = \varphi g + f$ qui est idempotent ($h^2 = h$) et son noyau est $\ker f \cap \ker g$. \square

Soit I un idéal à gauche de A , le lemme précédent et la noethérianité à gauche de A impliquent qu'il existe un idempotent f dans I tel que $\ker f = \bigcap_{g \in I} \ker g$. En considérant la décomposition $V = \ker f \oplus \text{im} f$, on obtient que pour tout g dans I , $g = fg$, donc I est l'idéal engendré par f .

REMARQUE – Il s'ensuit que les idéaux à gauche de A sont en bijection décroissante avec les sous-espaces vectoriels de V par l'application qui a un sous-espace vectoriel associe l'ensemble des endomorphismes de V qui s'annulent sur ce sous-espace.

On en déduit que les idéaux à gauche de A qui sont simples correspondent par la bijection précédente aux sous-espaces vectoriels de codimension 1, ainsi ce sont les idéaux à gauche de la forme $\{f \in \text{End}_k(V), f|_W = 0\}$ où W est un sous-espace de codimension 1 dans V . En particulier, à isomorphisme près, il existe un unique A -module simple.

2. \Rightarrow 3.) Comme A est semi-simple comme A -module (à gauche), $A \simeq \bigoplus_{i \in I} C_i$, avec C_i isomorphe à une somme directe de copies de V_i , avec V_i simple et les V_i non isomorphes deux-à-deux. Maintenant, A est noethérien à gauche, donc l'ensemble I est fini, et $C_i \simeq V_i^{n_i}$ avec $n_i \geq 1$.

Notons alors K_i l'anneau des endomorphismes de V_i , d'après le lemme de Schur, K_i est un corps (non nécessairement commutatif). V_i possède ainsi une structure de K_i -espace vectoriel (à gauche). Le fait que K_i soit constitué d'endomorphismes du A -module V_i permet de dire que les actions de A et de K_i sur V_i commutent.

En outre, on a un isomorphisme canonique $A^{op} \rightarrow \text{End}_A(A)$, qui à a associe la multiplication à droite par a . Or, un endomorphisme de A comme A -module revient à se donner un endomorphisme de C_i pour tout i d'après le lemme de Schur. Mais alors, si on fixe un isomorphisme $C_i \simeq V_i^{n_i}$, les endomorphismes de C_i sont en bijection avec les matrices carrées de taille n_i à coefficients dans K_i . Donc, A^{op} est un produit d'algèbres de matrices sur des corps, donc A aussi.

Maintenant, pour démontrer la dernière assertion, il suffit de faire le cas $A = \mathcal{M}_n(k)$ où k est un corps. Notons V le module simple de A constitué des matrices dont toutes les colonnes, sauf la première, sont nulles. $K = \text{End}_A(V)$. Un calcul simple montre que K s'identifie à k^{op} par l'application qui à un scalaire $\lambda \in k^{op}$ associe la restriction à V de l'application de A dans A qui consiste en la multiplication à droite par λ de tous les coefficients des matrices. On peut alors constater que la multiplicité du module simple V dans A est égale à la dimension de V sur K et que l'application $A \rightarrow \text{End}_K(V)$ est un isomorphisme. \square

EXERCICE –

- Soit G un groupe fini et k un corps, montrer que $k[G]$ est semi-simple si et seulement si $\#G$ est inversible dans k .
- On suppose maintenant que k est algébriquement clos et que $\#G$ est inversible dans k , en utilisant le théorème de structure des algèbres semi-simples, démontrer que le nombre de classes d'isomorphismes de représentations irréductibles de G sur k est égal au nombre de classes de conjugaison dans G , et que la somme des carrés des dimensions de ces représentations irréductibles est égale à $\#G$.

5 Tor-dimension

Soit A un anneau.

DÉFINITION 17 – On note $\text{Tor} - \text{Dim}(A) = \sup \{n \in \mathbb{N}, \exists M, N \quad \text{Tor}_n^A(M, N) \neq 0\}$.

THÉORÈME 13 – Si $(M_i)_{i \in I}$ est un système inductif filtrant de A -modules à droite et N un A -module à gauche, on a un isomorphisme canonique : $\varinjlim \text{Tor}_*(M_i, N) \simeq \text{Tor}_*\left(\varinjlim M_i, N\right)$

DÉMONSTRATION – On démontre ce résultat en calculant les Tor grâce à une résolution projective de N . Ensuite, il suffit de remarquer que le foncteur $- \otimes Y$ commute aux limites inductives (filtrantes) si Y est un A -module, et que le foncteur homologie H_n commute aux limites inductives filtrantes de complexes. \square

THÉORÈME 14 – Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\text{Tor} - \text{Dim}(A) \leq n$
2. $\text{Tor}_{n+1}^A(M, N) = 0$ pour tous modules M et N .

3. Tout A -module M possède une résolution plate (i.e. les P_i sont plats) de la forme

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

4. Pour tout A -module M , si $P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ est exacte avec P_i plats, le noyau de $P_{n-1} \longrightarrow P_{n-2}$ est plat.

5. Pour tout idéal I et tout module N , $\text{Tor}_{n+1}^A(A/I, N) = 0$

6. Pour tout idéal I de type fini et tout module N de type fini, $\text{Tor}_{n+1}^A(A/I, N) = 0$.

DÉMONSTRATION – Les implications suivantes sont triviales : 4. \Rightarrow 3. \Rightarrow 1. \Rightarrow 2. \Rightarrow 5. \Rightarrow 6).

Pour démontrer 2. \Rightarrow 4.), on procède exactement comme pour la Ext-dimension.

Pour démontrer 6. \Rightarrow 5.), il suffit de voir que si I est un idéal, A/I s'identifie à la limite inductive filtrante des A/J où J parcourt les idéaux de type fini inclus dans I , et N à la limite inductive filtrante de ses sous-modules de type fini.

Démontrons maintenant 5. \Rightarrow 2.), comme tout module M est limite inductive de ses sous-modules de type fini, il suffit de montrer que $\text{Tor}_{n+1}^A(M, N) = 0$ pour tout A -module M de type fini. Démontrons le par récurrence sur le nombre minimal i de générateurs de M . Il suffit de démontrer que si M' est un sous-module de M tel que $\text{Tor}_{n+1}^A(M', -) = 0$ et que M/M' est monogène, alors $\text{Tor}_{n+1}^A(M, -) = 0$, mais cela résulte directement de la longue suite exacte homologique des foncteurs dérivés appliquée à la suite exacte courte suivante :

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M/M' \longrightarrow 0$$

□

On peut signaler les théorèmes suivants, le premier utilisant essentiellement qu'un A -module plat et de présentation finie est projectif, le second étant basé sur l'étude de beaucoup de longues suites exactes.

THÉORÈME 15 – Si A est un anneau noethérien, $\text{Tor} - \text{Dim}(A) = \text{Ext} - \text{Dim}(A)$.

THÉORÈME 16 – Soit A un anneau :

$$\text{Tor} - \text{Dim}(A[X]) = \text{Tor} - \text{Dim}(A) + 1$$

$$\text{Ext} - \text{Dim}(A[X]) = \text{Ext} - \text{Dim}(A) + 1$$

THÉORÈME 17 (HILBERT-SERRE) – Soit A un anneau local noethérien, d'idéal maximal \mathfrak{m} et de corps résiduel k . On dit que A est local régulier si sa dimension de Krull est égale à la dimension du k -espace vectoriel $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Alors, A est local régulier si et seulement si $\text{Ext} - \text{Dim}(A) < \infty$. Dans ce cas, $\dim A = \text{Ext} - \text{Dim}(A)$.

DÉMONSTRATION – E.G.A. IV₀ 17.3.1 □

6 Anneaux principaux

Soit A un anneau principal. D'après les résultats précédents, $Ext - Dim(A) \leq 1$, résultat qui peut aussi s'obtenir en démontrant que tout sous-module d'un A -module libre est libre (cf. [Hil]). On obtient ainsi le théorème suivant :

THÉORÈME 18 – Pour tous A -modules M et N , on a :

$$\forall i \geq 2 \quad Ext_A^i(M, N) = 0 \quad Tor_i^A(M, N) = 0$$

THÉORÈME 19 – Soit M un A -module. M est injectif si et seulement si M est divisible. M est plat si et seulement si M est sans torsion.

DÉMONSTRATION – Le cas des injectifs a déjà été traité. On sait que M est plat si et seulement si $Tor_1^A(A/x, M) = 0$ pour tout x dans A , or $Tor_1^A(A/x, M) = \{m \in M, x.m = 0\}$ si $x \neq 0$. \square

7 Formule de Künneth

THÉORÈME 20 – Soient C_\star et C'_\star deux complexes de A -modules projectifs, on suppose que pour tout n , les bords $B_n(C_\star)$ forment un module plat, alors il existe une suite exacte fonctorielle, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n} H_p(C_\star) \otimes_A H_q(C'_\star) \longrightarrow H_n(C_\star \otimes_A C'_\star) \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} Tor_1^A(H_p(C_\star), H_q(C'_\star)) \longrightarrow 0$$

DÉMONSTRATION – On utilise la même idée que pour la démonstration du théorème 8 : on peut décomposer le complexe C_\star en une suite exacte courtes de complexes dont les termes extrémaux ont un opérateur de bord nul, ainsi on a les suites exactes suivantes :

$$0 \longrightarrow Z_\star \longrightarrow C_\star \longrightarrow B_\star[-1] \longrightarrow 0 \quad 0 \longrightarrow B_\star \longrightarrow Z_\star \longrightarrow H_\star \longrightarrow 0$$

Remarquons d'abord que les modules $Z_n(C_\star)$ sont plats (grâce à la première suite exacte). Tensorisons la deuxième suite exacte par l'homologie du complexe C'_\star :

$$0 \longrightarrow Tor_1^A(H_\star, H'_\star) \longrightarrow B_\star \otimes H'_\star \longrightarrow Z_\star \otimes H'_\star \longrightarrow H_\star \otimes H'_\star \longrightarrow 0$$

Tensorisons l'autre suite exacte par C'_\star :

$$0 \longrightarrow Z_\star \otimes C'_\star \longrightarrow C_\star \otimes C'_\star \longrightarrow B_\star[-1] \otimes C'_\star \longrightarrow 0$$

La suite exacte longue de cette suite exacte courte de complexes donne une longue suite exacte (compte tenu du fait que les Z_n et B_n sont plats et constituent des complexes ayant un bord nul) :

$$B_\star \otimes H'_\star \longrightarrow Z_\star \otimes H'_\star \longrightarrow H_\star(C_\star \otimes C'_\star) \longrightarrow B_\star[-1] \otimes H'_\star \longrightarrow Z_\star[-1] \otimes H'_\star$$

La résultat s'obtient en transformant cette suite exacte longue en suites exactes courtes. \square

REMARQUE – Dans un contexte plus général où il n'est pas possible de contrôler la platitude du complexe formé par les bords, mais en conservant l'hypothèse de "projectivité" sur les C_n et C'_n , il existe une suite spectrale (dite de Künneth) dont le terme E^2 est décrit par la formule $E_{pq}^2 = \bigoplus_{i+j=q} \text{Tor}_p^A(H_i(C_\star), H_j(C'_\star))$ qui converge vers $H_{p+q}(C_\star \otimes C'_\star)$. La suite exacte de Künneth dont il est question ici (essentiellement pour A principal) n'est que le cas particulier de cette suite spectrale puisque $\text{Tor}_2^A = 0$, et qu'ainsi $E^2 = E^\infty$.

8 Théorème des coefficients universels

On suppose que l'anneau A est principal.

THÉORÈME 21 – *Si X est un espace topologique, il existe des suites exactes fonctorielles :*

$$0 \longrightarrow H_q(X) \otimes G \longrightarrow H_q(X; G) \longrightarrow \text{Tor}(H_{q-1}(X), G) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \text{Ext}(H_{q-1}(X), G) \longrightarrow H^q(X; G) \longrightarrow \text{Hom}_A(H_q(X), G) \longrightarrow 0$$

Et ces suites exactes sont scindées.

DÉMONSTRATION – On applique le théorème 8 avec les foncteurs $- \otimes_A G$ et $\text{Hom}(-, G)$, les hypothèses étant vérifiées (si, si!). \square

THÉORÈME 22 – *Si X est un espace topologique et G un A -module tel que $H_\star(X)$ ou G soit de type fini, alors il existe une suite exacte fonctorielle :*

$$0 \longrightarrow H^q(X; A) \otimes G \longrightarrow H^q(X; G) \longrightarrow \text{Tor}(H^{q+1}(X), G) \longrightarrow 0$$

Et cette suite exacte est scindée.

9 Exercices

9.1 Une reformulation du lemme du serpent

EXERCICE – *Soit \mathcal{C} une catégorie abélienne possédant suffisamment de projectifs. On note \mathcal{F} la catégorie des flèches de \mathcal{C} , c'est-à-dire la catégorie dont les objets sont les morphismes de \mathcal{C} et pour laquelle l'ensemble des morphismes de $X \rightarrow Y$ vers $X' \rightarrow Y'$ est l'ensemble des diagrammes commutatifs suivants :*

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & Y' \end{array}$$

On note coker le foncteur $\mathcal{F} \rightsquigarrow \mathcal{C}$ qui à une flèche associe son conoyau.

- Démontrer que la catégorie \mathcal{F} possède suffisamment de projectifs.
- Montrer que le foncteur coker est exact à droite.
- Donner une formule pour les foncteurs dérivés à gauche de coker . En particulier, montrer que le deuxième foncteur dérivé est nul.

9.2 Limites projectives

EXERCICE – On note \mathcal{C} la catégorie des systèmes projectifs de groupes abéliens indexés par \mathbb{N} . On considère le foncteur \varprojlim qui à un système projectif associe sa limite projective.

- Démontrer que la catégorie \mathcal{C} possède assez d'injectifs, en considérant les systèmes projectifs de la forme $\cdots \rightarrow J_n \rightarrow J_{n-1} \rightarrow \cdots$ où $J_n = I_0 \oplus \cdots \oplus I_n$, avec I_n injectif, et $J_n \rightarrow J_{n-1}$ la projection sur les premiers facteurs.
- Montrer que le foncteur \varprojlim est exact à gauche.
- Donner une formule pour $R^q \varprojlim$. En particulier, montrer que le deuxième foncteur dérivé est nul.
- Établir que les systèmes projectifs $M_\bullet = (M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant la condition suivante, dite de Mittag-Leffler, sont tels que $R^1 \varprojlim M_\bullet = 0$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(\text{im}(M_{n+i} \rightarrow M_n))_{i \in \mathbb{N}}$ est stationnaire.

9.3 Exercice faussement géométrique

Soit p un nombre premier. Pour tout i , on note M_i l'espace topologique $\mathcal{S}^1 \times D^2$ où D^2 désigne le disque unité ouvert de \mathcal{C} . On définit une application continue $\Phi_i : M_i \rightarrow M_{i+1}$ par la formule $\Phi(z, w) = (z^p, w + \varepsilon z)$ avec $\varepsilon < \frac{1}{p}$. On note M la limite inductive du système d'espaces topologiques $M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow \cdots$.

EXERCICE – Identifier le complexe $C_\star(M)$ à la limite inductive des $C_\star(M_i)$.

En déduire que l'on peut identifier $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_\star(M), \mathbb{Z})$ à la limite projective des $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_\star(M_i), \mathbb{Z})$.

Utiliser des résultats sur les foncteurs dérivés des limites projectives pour démontrer le résultat suivant :

$$H^i(M; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{si } i = 1 \\ \mathbb{Z}_p / \mathbb{Z} & \text{si } i = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette façon de faire les calculs présente l'inconvénient qu'il y est important de connaître quelques propriétés du premier foncteur dérivé de la limite projective des systèmes projectifs indexés par \mathbb{N} . On peut également adopter une autre approche qui consiste d'abord à calculer l'homologie de cet espace et à appliquer la formule des coefficients universels :

EXERCICE – Démontrer le résultat suivant :

$$H_i(M; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 0 \\ \mathbb{Z} \left[\frac{1}{p} \right] & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démontrer que $\text{Ext}_{\mathbb{Z}} \left(\mathbb{Z} \left[\frac{1}{p} \right], \mathbb{Z} \right) = \mathbb{Z}_p / \mathbb{Z}$ [Hint : utiliser une résolution injective de \mathbb{Z} .] et en déduire le résultat de l'exercice précédent.

9.4 Quelques calculs

EXERCICE – Soit k un corps commutatif, $n \geq 2$, on pose $A = k[X]/(X^n)$. Désignons par k le A -module $A/(X)$. Déterminer $\text{Tor}_{\star}^A(k, k)$ et $\text{Ext}_{\star}^A(k, k)$.

EXERCICE –

- Décrire $\text{Tor}_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{Z}}(G, H)$ et $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(G, H)$ où G et H sont deux groupes abéliens de type fini quelconques.
- $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1 \left(\mathbb{Z} \left[\frac{1}{p} \right] / \mathbb{Z}, \mathbb{Z} \right) = \mathbb{Z}_p$, $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1 \left(\mathbb{Z} \left[\frac{1}{p} \right], \mathbb{Z} \right) = \mathbb{Z}_p / \mathbb{Z}$
- $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \hat{\mathbb{Z}}$, $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = \hat{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z}$

9.5 Extensions

EXERCICE – Soit \mathcal{C} une catégorie abélienne ayant assez de projectifs et d'injectifs. Soit X et Y deux objets de \mathcal{C} . On a défini une bijection entre $\text{Ext}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ et $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, Y)$ en utilisant une résolution injective de Y .

- Remarque que nous eussions pu définir de même une bijection $\text{Ext}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ et $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, Y)$ en prenant une résolution projective de X .
- Démontrer que, sous l'équivalence de la définition de $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, Y)$ utilisant une résolution projective de X ou une résolution injective de Y , la correspondance précédemment définie avec $\text{Ext}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ est la même (au moins au signe près).

9.6 Tor de faisceaux

EXERCICE – Soit A un anneau commutatif, S une partie multiplicative. Montrer que si M et N sont deux A -modules, on a un isomorphisme canonique :

$$S^{-1} \text{Tor}_q^A(M, N) = \text{Tor}_q^{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N)$$

EXERCICE – Soit (X, \mathcal{O}_X) un espace annelé.

- Soient \mathcal{M} et \mathcal{N} deux \mathcal{O}_X -Modules. Construire un préfaisceau sur X dont les sections sur un ouvert U soient $\mathrm{Tor}_q^{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{M}(U), \mathcal{N}(U))$ [Hint : ce n'est pas trivial].
On note $\mathcal{T}or_q^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ le faisceau associée à ce préfaisceau, et c'est un \mathcal{O}_X -Module.
- Démontrer que si U est un ouvert de X , on a un isomorphisme canonique de \mathcal{O}_U -Modules :

$$\mathcal{T}or_q^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N})|_U = \mathcal{T}or_q^{\mathcal{O}_U}(\mathcal{M}|_U, \mathcal{N}|_U)$$

- En utilisant le résultat de l'exercice précédent, démontrer que si X est un schéma, et \mathcal{M} et \mathcal{N} deux \mathcal{O}_X -Modules quasi-cohérents, alors $\mathcal{T}or_q^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ est quasi-cohérent. Montrer que dans ce cas, pour tout ouvert affine U de X , on a un isomorphisme canonique $\mathcal{T}or_q^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N})(U) = \mathrm{Tor}_q^{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{M}(U), \mathcal{N}(U))$.
- Sous les hypothèses de la question précédente, montrer que pour tout point x du schéma X , on a un isomorphisme canonique :

$$\mathcal{T}or_q^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N})_x = \mathrm{Tor}_q^{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{M}_x, \mathcal{N}_x)$$

9.7 Un peu de géométrie algébrique

DÉFINITION 18 – Soit X un schéma localement noethérien. On dit que X est régulier si et seulement si pour tout point x de X , l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est régulier (i.e. de Ext-dimension finie).

On sait que pour un anneau noethérien, la Ext-dimension est égale à la Tor-dimension, donc dans la définition d'un schéma régulier, on peut remplacer l'hypothèse de finitude de la Ext-dimension par une hypothèse de finitude de la Tor-dimension.

EXERCICE – Soit k un corps commutatif, on note $X = \mathbb{A}_k^n$ le schéma affine $\mathrm{Spec} k[X_1, \dots, X_n]$.

- Démontrer que pour tous faisceaux quasi-cohérents de \mathcal{O}_X -Modules \mathcal{M} et \mathcal{N} :

$$\mathcal{T}or_{n+1}^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = 0$$

- En déduire que X est un schéma régulier, et que $\dim X = n$.

Bibliographie

Pour cet exposé, on pourra consulter [Hil], [Spa], [Sch], [Ver].

La propriété (T) de Kazhdan, interprétation cohomologique

François Alter

Durant cet exposé, je vais m'intéresser essentiellement à l'interprétation cohomologique de la propriété (T) de Kazhdan à savoir son lien avec la propriété (FH) de Serre.

1 Propriété (T) de Kazhdan

Toutes les représentations seront des représentations unitaires dans des espaces de Hilbert.

DÉFINITION 1 – Soit $\pi : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ une représentation. Soient $\varepsilon > 0$ et une partie $Q \subset G$, on dit qu'un vecteur $\xi \in \mathcal{H}$ est (ε, Q) -invariant si $\sup_{g \in Q} \{\|\pi(g)\xi - \xi\|\} < \varepsilon\|\xi\|$.

REMARQUE – On reprend les mêmes notations :

1. Tout vecteur $\pi(G)$ -invariant non nul est (Q, ε) -invariant ;
2. Le vecteur 0 n'est pas (ε, Q) -invariant ;
3. Si ξ est (ε, Q) -invariant, ξ est aussi $(\varepsilon, \overline{Q \cup Q^{-1}})$ -invariant ;
4. Si $Q' \subset Q$ et $\varepsilon' \geq \varepsilon$ et si ξ est (ε, Q) -invariant, ξ est aussi (ε', Q') -invariant ;

DÉFINITION 2 – Soit G un groupe topologique. Un sous ensemble de Kazhdan est un sous-ensemble Q de G tel qu'il existe un nombre $\varepsilon > 0$ avec la propriété que toute représentation qui possède un vecteur (ε, Q) -invariant possède aussi un vecteur invariant non nul.

Le nombre ε est une constante de Kazhdan, et (ε, Q) est une paire de Kazhdan pour G .

PROPOSITION 1 – Pour tout groupe topologique G , la paire $(\sqrt{2}, G)$ est de Kazhdan.

DÉMONSTRATION – Soient π une représentation de G sur l'espace de Hilbert \mathcal{H} et ξ un vecteur unité $(G, \sqrt{2})$ invariant. Soit C l'enveloppe convexe fermée de l'orbite $\pi(G)\xi$. On prend alors la projection de 0 sur C , c'est à dire on considère $\eta_0 \in C$ l'unique vecteur tel que $\|\eta_0\| = \min_{\eta \in C} \|\eta\|$. Comme l'ensemble C est invariant par $\pi(G)$, le vecteur η_0 aussi. Il reste à prouver que η_0 est non nul.

Posons $\varepsilon = \inf_{g \in G} \Re \langle \xi | \pi(g)\xi \rangle$. Comme $\sup_{g \in G} \|\pi(g)\xi - \xi\|^2 < 2$, on a $\varepsilon > 0$. De plus, $\Re \langle \sum \lambda_i \langle \xi | \pi(g_i)\xi \rangle \rangle \geq \varepsilon$ pour toute combinaison convexe finie ($\sum \lambda_i = 1$), si bien que $\Re \langle \xi | \eta \rangle \geq \varepsilon > 0$ pour tout $\eta \in C$. En particulier $\eta_0 \neq 0$. \square

DÉFINITION 3 – *Un groupe topologique G a la propriété (T), ou est un groupe de Kazhdan, s'il contient un sous-ensemble de Kazhdan compact.*

EXEMPLE – *Tout groupe compact possède la propriété (T).*

DÉFINITION 4 – *On dit que π possède presque des vecteurs invariants si, pour tout (ε, K) avec K compact, il existe un vecteur unité (ε, K) -invariant.*

PROPOSITION 2 – *Un groupe topologique G possède la propriété (T) si et seulement si toute représentation de G qui possède presque des vecteurs invariants possède des vecteurs invariants non nuls.*

DÉMONSTRATION – La partie directe est triviale. Pour la réciproque : supposons que G n'a pas la propriété (T). Soit I l'ensemble des paires (ε, K) avec K compact dans G . Il existe donc pour tout $(\varepsilon, K) \in I$ une représentation unitaire $\pi_{(\varepsilon, K)}$ de G sans vecteur invariant non nul et un vecteur unité $\xi_{(\varepsilon, K)}$ (ε, K) -invariant. Alors la somme directe $\pi = \bigoplus_{(\varepsilon, K) \in I} \pi_{(\varepsilon, K)}$ possède presque des vecteurs invariants. \square

EXEMPLE – *Le groupe \mathbb{R} ne possède pas la propriété (T).*

DÉMONSTRATION – Soit $\lambda_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}))$ la représentation régulière (*id est* par les translations) de la droite réelle. Elle possède presque des vecteurs invariants. En effet, soient $\varepsilon > 0$ et $K \subset \mathbb{R}$ une partie compacte. Soit c assez grand tel que $K \subset [-c, c]$. Posons, pour $a > 0$, $\xi = \frac{1}{\sqrt{a}} \mathbf{1}_{[0, a]}$, c'est un vecteur unité. Alors $\|\lambda_{\mathbb{R}}(t)\xi - \xi\|^2 \leq \frac{2c}{a}$ dès que $|t| \leq c$, donc ξ est (ε, K) -invariant si $a \geq \frac{2c}{\varepsilon}$.

Cependant, $\lambda_{\mathbb{R}}$ ne possède aucun vecteur invariant non nul. \square En fait on montre facilement de la même manière :

PROPOSITION 3 – *Un groupe moyennable non compact ne possède pas la propriété (T)*

DÉMONSTRATION – En effet la représentation régulière $\lambda_G : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{L}^2(G))$ possède presque des vecteurs invariants mais ne possède pas de vecteur invariant non nul, sinon G serait de mesure de Haar finie (la fonction constante serait dans $\mathcal{L}^2(G)$), et par suite G serait compact. \square

Mais peut-être faut-il un rappel sur les groupes moyennables :

THÉORÈME 1 (ADMIS) – *Pour un groupe localement compact à base dénombrable G avec mesure de Haar invariante à gauche μ , les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. G est moyennable au sens où λ_G a presque des vecteurs invariants;

2. Pour toute partie compacte K de G et tout $\varepsilon > 0$, il existe un borélien U de G tel que $0 < \mu(U) < \infty$ et $\mu(gU\Delta U) < \varepsilon\mu(U)$ pour tout $g \in K$ (propriété de Følner);
3. Pour toute partie compacte K de G et tout $\varepsilon > 0$, il existe un borélien U de G tel que $0 < \mu(U) < \infty$ et $\mu(KU\Delta U) < \varepsilon\mu(U)$ pour tout $g \in K$ (propriété de Følner uniforme);
4. Toute action continue de G sur un espace métrique compact possède une mesure de probabilité invariante;
5. Il existe une forme linéaire M sur le Banach $\mathcal{L}^\infty(G)$ qui est positive, normalisée et invariante à gauche par G ;
6. Il existe une forme linéaire M sur le Banach $\mathcal{UC}^b(G)$ qui est positive, normalisée et invariante à gauche par G ;
7. Toute action continue de G sur un convexe compact non vide possède un point fixe.

De plus on a les propriétés suivantes qui vont nous servir :

PROPOSITION 4 (ADMISE) –

1. Tout groupe abélien est moyennable;
2. Si G est localement compact et moyennable, alors tout sous-groupe fermé de G est moyennable.

PROPOSITION 5 – Tout groupe localement compact qui a la propriété (T) est à génération compacte.

DÉMONSTRATION – Posons \mathcal{C} l'ensemble des sous-groupes ouverts à génération compacte de G : il est non-vide car tout voisinage compact de l'identité engendre un tel sous-groupe. On a même $G = \bigcup_{H \in \mathcal{C}} H$.

Pour tout $H \in \mathcal{C}$, G/H est discret. On peut considérer la mesure de comptage sur cet espace et noter π_H la représentation naturelle de G dans $\mathcal{L}^2(G/H)$ et ξ_H la fonction caractéristique de la classe H de G/H , qui est un vecteur de norme 1 dans $\mathcal{L}^2(G/H)$. Soit π la somme directe de ces représentations, et considère les ξ_H comme des vecteurs dans l'espace somme directe. π possède presque des vecteurs invariants. En effet, soit K un compact de G , comme \mathcal{C} est un recouvrement ouvert de K , et que toute réunion finie de sous-groupe ouvert à génération compacte est contenue dans un sous-groupe ouvert à génération compacte, il existe un sous-groupe $H^0 \in \mathcal{C}$ qui contient K . Du coup, $\pi(g)\xi_{H^0} = \xi_{H^0}$ pour tout $g \in K$.

Comme G est un groupe de Kazhdan, soit η un vecteur invariant non nul de π . Soit $L \in \mathcal{C}$ tel que $\eta_L \neq 0$. Ce vecteur est invariant par π_L , donc la fonction $\eta_L : G/L \rightarrow \mathcal{C}$ est constante. Comme cette fonction est de carré sommable, G/L est fini. D'où clairement $G \in \mathcal{C}$. \square

COROLLAIRE – Tout groupe dénombrable qui a la propriété (T) est de type fini

EXERCICE – Soit G un groupe localement compact qui a la propriété (T). Montrer que tout sous-groupe compact générateur de G est un ensemble de Kazhdan

EXERCICE – Soit Γ un groupe dénombrable qui a la propriété (T). Montrer que tout sous-ensemble de Kazhdan fini de Γ est générateur.

PROPOSITION 6 – Soit $\varphi : G \rightarrow H$ un homomorphisme continue d'image dense. Si le groupe G possède la propriété (T) alors H la possède aussi.

DÉMONSTRATION – Soit (ε, K) une paire de Kazhdan pour G avec K compact. alors $(\varepsilon, \varphi(K))$ est une paire de Kazhdan pour H . \square

PROPOSITION 7 – Soit G un groupe topologique qui a la propriété (T).

1. Tout homomorphisme continu de G dans un groupe localement compact moyennable a une image relativement compacte ;
2. Tout homomorphisme continu de G dans \mathbb{R}^n ou \mathbb{Z}^n est constant ;
On suppose de plus G localement compact :
3. Le groupe G est unimodulaire ;
4. Le groupe $G/\overline{(G, G)}$ est compact. En particulier, si G est dénombrable, alors son abélianisé est un groupe fini.

DÉMONSTRATION – Soit H un groupe localement compact moyennable, et $\varphi : G \rightarrow H$ un homomorphisme continu. Le groupe $\overline{\varphi(G)}$ est moyennable car c'est un sous-groupe fermé d'un groupe moyennable. D'où il est compact car de Kazhdan.

Le (ii.) provient du fait que le module d'un groupe localement compact (c'est à dire $\Delta : G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ tel que $\mu(Bg) = \Delta(g)\mu(B)$ pour tout borélien de G où μ est la mesure de Haar invariante à gauche de G) est un homomorphisme continu à valeur dans le groupe \mathbb{R}_+^* isomorphe à \mathbb{R} . \square

THÉORÈME 2 (ADMIS) – On a les exemples suivants de groupe de Kazhdan :

1. Pour tout $n \geq 3$ et tout corps local \mathbb{K} , le groupe $SL_n(\mathbb{K})$ a la propriété (T) ;
2. Soit \mathbb{K} un corps local et G le groupe des points \mathbb{K} -rationnels d'un groupe algébrique simple défini et de rang déployé au moins deux sur \mathbb{K} . Alors G a la propriété (T) ;
3. Soient G un groupe localement compact et Γ un sous-groupe discret de G tel que G/Γ possède une mesure de probabilité G -invariante. Alors G a la propriété (T) si et seulement si Γ l'a.

On en déduit notamment la première application spectaculaire de Kazhdan que tout réseau de $SL_n(\mathbb{R})$ est de type fini.

2 Propriété (FH) de Serre

DÉFINITION 5 – Une action affine d'un groupe topologique G sur un espace de Hilbert affine \mathcal{H} (réel ou complexe, on notera H son espace des translations) est un homomorphisme α de G dans le groupe $Is(\mathcal{H}) = H \rtimes \mathcal{U}(H)$ (par le choix d'une origine $0 \in \mathcal{H}$) des isométries

affines de \mathcal{H} tel que l'application $\begin{cases} G \times \mathcal{H} & \rightarrow \mathcal{H} \\ (g, x) & \mapsto \alpha(g)x \end{cases}$ est continue.

2.1 Actions affines et représentations

Tout homomorphisme continu d'un groupe topologique G dans le groupe des translations H d'un espace de Hilbert affine \mathcal{H} fournit une action affine de G sur \mathcal{H} .

De même en conjuguant une représentation orthogonale (ou unitaire selon le cas) $G \rightarrow \mathcal{U}(H)$ par une translation, on obtient une action affine de G sur \mathcal{H} . Cette action a alors clairement un point fixe, et réciproquement, toute action avec un point fixe peut être construite de la sorte. On a aussi une autre caractéristique :

LEMME 1 – *Soit α une action affine d'un groupe topologique sur un espace de Hilbert affine. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. α possède un point fixe ;
2. toute orbite de α est bornée ;
3. α possède une orbite bornée.

DÉMONSTRATION – Les implications $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$ sont évidentes. Prouvons l'implication $3 \Rightarrow 1$.

Soit A une orbite bornée. On va utiliser le lemme de Serre suivant :

LEMME 2 (DES CENTRES) – *Posons $\rho(x) = \sup_{y \in A} \|xy\|$ alors ρ atteint son minimum en un unique point. C'est à dire que parmi toutes les boules qui contiennent A , il y en a une de rayon minimal, son centre sera appelé le centre de A .*

DÉMONSTRATION – Posons $r = \inf \rho$. On a la jolie inégalité :

$$\frac{1}{2} \|xy\|^2 \leq \rho(x)^2 + \rho(y)^2 - 2r^2 \quad (15)$$

En effet, par l'égalité de la médiane si m est le milieu de $[x, y]$, alors pour tout $a \in A$,

$$\frac{1}{2} \|xy\|^2 = \|ax\|^2 + \|ay\|^2 - 2\|am\|^2 \leq \rho(x)^2 + \rho(y)^2 - 2\|am\|^2.$$

D'où, $\frac{1}{2} \|xy\|^2 \leq \rho(x)^2 + \rho(y)^2 - 2\rho(m)^2$. Cela entraîne (15) car $\rho(m) \geq r$.

On prend alors une suite minimisante $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $r = \lim \rho(x_n)$. L'inégalité (15) montre que c'est une suite de Cauchy. Sa limite est le centre recherché. De plus la même inégalité montre l'unicité du centre. \square On prend maintenant le centre de A , c'est évidemment un point fixe. \square

DÉFINITION 6 (PROPRIÉTÉ (FH)) – *Un groupe topologique possède la propriété (FH) si toute action affine de G sur un espace de Hilbert affine possède un point fixe.*

2.2 Cohomologie

Soit $\alpha : G \rightarrow \text{Is}(\mathcal{H})$ une action affine. Comme le choix d'une origine $0 \in \mathcal{H}$ donne $\text{Is}(\mathcal{H}) = H \rtimes \mathcal{U}(H)$, on a une décomposition naturelle : $\alpha(g) = t(g) + \varphi(g)$, où φ est une isométrie linéaire de H et t une translation. Or α est un homomorphisme, on a donc la relation suivante :

$$t(gh) = t(g) + \varphi(g)t(h), \text{ pour tous } g, h \in G. \quad (16)$$

Réciproquement, si $\varphi : G \rightarrow \mathcal{U}(H)$ est une représentation et si $t : G \rightarrow H$ est une application continue vérifiant (16), la formule $\alpha(g) = t(g) + \varphi(g)$ définit une action affine.

On appellera *cocycle*, un tel t qui vérifie (16), et on notera $Z^1(G, \varphi)$ le (\mathbb{R} ou \mathcal{C})-espace vectoriel des cocycles.

Que va être un *cobord* ?

Ce sera une action avec un point fixe, c'est à dire de la forme α est conjugué à φ par une translation de vecteur x , c'est à dire si on a la relation :

$$t(g) = \varphi(g)x - x \text{ pour tout } g \in G. \quad (17)$$

On notera $B^1(G, \varphi)$ l'espace des cobords.

Et naturellement on regardera $H^1(G, \varphi) = Z^1(G, \varphi)/B^1(G, \varphi)$ le *premier espace de cohomologie de la représentation φ de G* .

Par tout ce que l'on a vu on a :

PROPOSITION 8 – *Soit G un groupe topologique. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. G possède la propriété (FH) ;
2. Pour toute représentation orthogonale ou unitaire φ de G , $H^1(G, \varphi) = \{0\}$.
3. Pour toute représentation orthogonale ou unitaire φ de G , tout cocycle par rapport à φ qui est continu est borné en tant que fonction sur G .

On se propose par la suite de montrer que si G est localement compact à base dénombrable,

THÉORÈME 3 – *Ces propriétés sont équivalentes à la propriété (T).*

3 (FH) \Rightarrow (T)

On prend donc G localement compact à base dénombrable et φ une représentation orthogonale ou unitaire de G .

On fait de l'espace des cocycles $Z^1(G, \varphi)$ un espace topologique grâce à la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de G (n'oublions pas que c'est un espace de fonctions sur G). C'est ainsi un espace de Fréchet (espace vectoriel topologique métrisable et complet) car G est à base dénombrable. On munit alors $H^1(G, \varphi)$ de la topologie quotient. Comme rien ne nous dit que B^1 est fermé dans Z^1 , on a pas toujours le fait que H^1 soit séparé. On a en fait le lemme suivant qui montre en même temps l'implication (FH) \Rightarrow (T) :

LEMME 3 (GUICHARDET) – *Si φ possède presque des vecteurs invariants et si $H^1(G, \varphi)$ est séparé, alors φ possède des vecteurs invariants non nuls.*

DÉMONSTRATION – Supposons que φ n'ait aucun vecteur invariant non nul.

Posons alors l'application linéaire $\beta : H \rightarrow Z^1$ définie par $\beta(x)(g) = \varphi(g)x - x$. Elle est injective par hypothèse et son image est B^1 . De plus elle est continue car $\|\beta(x)(g)\| \leq 2\|x\|$ pour tous $x \in H$ et $g \in G$.

Comme φ possède presque des vecteurs invariants, on peut trouver une suite de vecteurs unitaires x_n tels que la suite de fonctions $\beta(x_n)$ tende uniformément sur tout compact de G

vers 0. L'application $\beta^{-1} : B^1 \rightarrow H$ n'est donc pas quant à elle continue. Mais à ce moment, B^1 ne peut être fermé dans Z^1 sinon B^1 serait un espace de Fréchet sur lequel on peut invoquer le théorème du graphe fermé impliquant que l'inverse β^{-1} de l'application continue bijective β est nécessairement continue. D'où H^1 n'est pas séparé. \square

L'implication $(FH) \Rightarrow (T)$ est alors immédiate : $\{0\}$ est un espace séparé...

4 $(T) \Rightarrow (FH)$

La preuve est beaucoup plus longue.

Commençons par effectuer une réduction au cas réel.

DÉFINITION 7 – *On dit que G possède la propriété $(FH)_{\mathbb{R}}$ si toute action affine de G dans un espace de Hilbert affine réel possède un point fixe.*

On dit que G possède la propriété $(T)_{\mathbb{R}}$ si toute représentation orthogonale de G possédant presque des vecteurs invariants possède des vecteurs invariants non nuls. Il va suffire de montrer que $(T)_{\mathbb{R}} \Rightarrow (FH)_{\mathbb{R}}$. En effet, on a :

LEMME 4 –

1. $(FH)_{\mathbb{R}} \Rightarrow (FH)$;
2. $(T) \Rightarrow (T)_{\mathbb{R}}$.

DÉMONSTRATION –

1. Si G agit affinement sur un espace de Hilbert affine complexe \mathcal{H} , alors il agit tout aussi affinement sur l'espace réel sous-jacent $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$. Si G possède la propriété $(FH)_{\mathbb{R}}$, il existe un point fixe $\xi \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$, qui peut être vu comme un point de \mathcal{H} , donc est un point fixe pour l'action.
2. Soit H un espace de Hilbert réel et $\varphi : G \rightarrow \mathcal{U}(H)$ une représentation orthogonale de G possédant presque des vecteurs invariants. En définissant la représentation unitaire $\varphi_{\mathbb{C}} : G \rightarrow \mathcal{U}(H \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ par $\varphi_{\mathbb{C}}(g) = \varphi(g) \otimes \text{Id}$, il est clair que $\varphi_{\mathbb{C}}$ possède elle aussi presque des vecteurs invariants. Donc, si G possède la propriété (T) , alors il existe dans $H \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ un vecteur invariant non nul de la forme : $\xi = \xi_1 \otimes 1 + \xi_2 \otimes i$. Un des deux vecteurs ξ_i est non nul, et est donc un vecteur invariant non nul pour φ .

\square

Afin de prouver $(T)_{\mathbb{R}} \Rightarrow (FH)_{\mathbb{R}}$, comment faire ?

Le principe va être de construire, à partir d'une action sur un espace de Hilbert affine, une représentation orthogonale sur un espace de Hilbert ayant presque des vecteurs invariants. Cet espace sera énorme : on va envoyer tout point de l'espace affine de départ sur la sphère unité de l'espace d'arrivée, tous les vecteurs d'arrivés étant linéairement indépendants. Puis grâce à un paramètre de quantification ($t \in \mathbb{R}_+^*$), on va écraser tous ces vecteurs vers un unique vecteur, d'où les espaces de Hilbert considérés vont s'aplatir sur \mathbb{R} lorsque $t \rightarrow 0$. Les représentations induites vont à la limite posséder presque des vecteurs invariants, du coup en prenant la somme de ces représentations, on va obtenir une grosse représentation qui fonctionnera : elle aura un vecteur invariant...

PROPOSITION 9 – Soient \mathcal{H} un espace de Hilbert affine et $t > 0$. Alors il existe un espace de Hilbert H_t et une application continue $\gamma_t : \begin{cases} \mathcal{H} & \rightarrow H_t \\ \xi & \mapsto \xi_t \end{cases}$ dont l'image engendre topologiquement H_t , tels que $\langle \xi_t | \eta_t \rangle = \exp(-t\|\xi - \eta\|^2)$ pour tous $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. De plus, la paire (H_t, γ_t) est déterminée à isomorphisme unique près par ces conditions.

DÉMONSTRATION – On va adopter ici une vision vectorielle, on va identifier par le choix d'une origine \mathcal{H} avec son espace des translations H . On note alors $H^{\otimes n}$ l'espace H tensorisé n fois. On pose alors $T(H) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^{\otimes n}$, où la somme est hilbertienne (on ne garde que les éléments tels que la somme des carrés des normes soit convergente).

Pour tout $\xi \in H$, posons $\exp(\xi) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^{\otimes n}}{\sqrt{n!}}$

Alors $\langle \exp(\xi) | \exp(\eta) \rangle = \exp(\xi | \eta)$.

On pose donc $\xi_t = \exp(-t\|\xi\|^2) \exp(\sqrt{2t}\xi)$, pour avoir $\langle \xi_t | \eta_t \rangle = \exp(-t\|\xi - \eta\|^2)$.

Comme annoncé, ξ_t est un vecteur unité. On définit H_t comme le sous-espace fermé de $T(H)$ engendré par les ξ_t . Ce sont des espaces de Hilbert.

Si $t > 0$, et $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ sont des points distincts de H , alors leurs images $(\xi_1)_t, \dots, (\xi_n)_t$ sont linéairement indépendants dans H_t .

En effet, on effectue comme dans le cas classique pour montrer que des fonctions $x \mapsto e^{\lambda x}$ sont indépendantes :

supposons les $(\xi_i)_t$ pas indépendants, alors les $\exp(\xi_i)$ ont la même propriété : il existe une combinaison linéaire $\sum \lambda_i \exp(\xi_i) = 0$. Posons alors la fonction

$$f(x) = \langle \sum \lambda_i \exp(\xi_i) | \exp(x) \rangle = \sum \lambda_i e^{\langle \xi_i | x \rangle} = 0.$$

On effectue les différentiations : $D^{(p)} f_x(y_1, \dots, y_p) = \sum \lambda_i e^{\langle \xi_i | x \rangle} \langle \xi_i | y_1 \rangle \dots \langle \xi_i | y_p \rangle = 0$ Donc notamment, on doit avoir $\sum \lambda_i \langle \xi_i | y \rangle^p = 0$, pour tout $0 \leq p \leq n - 1$. Oh, mais c'est le bien classique Van Der Monde qui nous arrive là! Bon, on en déduit qu'il existe $i \neq j$ tels que $\langle \xi_i | y \rangle = \langle \xi_j | y \rangle$. Or les vecteurs $\xi_i - \xi_j$ sont non-nuls pour tous $i \neq j$, et il est bien clair que l'on peut trouver un vecteur $y \in H$ tel que pour tous $i \neq j$, $\langle \xi_i - \xi_j | y \rangle \neq 0$ (on part d'un vecteur non nul quelconque et on le bouge un peu...). Ceci prouve l'absurdité demandée.

Soient (H'_t, γ'_t) une autre paire vérifiant les conditions de la proposition, on écrit $\xi'_t = \gamma'_t(\xi)$. Comme on a que les ξ_t engendrent topologiquement H_t et de même pour les ξ'_t , on a l'unicité d'un isomorphisme $U : H_t \rightarrow H'_t$ tel que $U(\xi_t) = \xi'_t$. D'autre part, on a $\langle \xi'_t | \eta'_t \rangle = \langle \xi_t | \eta_t \rangle$, et les familles $(\xi_t)_{\xi \in H}$ et $(\xi'_t)_{\xi \in H}$ sont libres, d'où on peut étendre $\xi_t \mapsto \xi'_t$ en un isomorphisme de H_t sur H'_t . \square

COROLLAIRE – Étant donné un groupe topologique G et une action affine α de G sur \mathcal{H} , il existe une représentation orthogonale π_t de G sur H_t telle que $(\alpha(g)\xi)_t = \pi_t(g)(\xi_t)$.

DÉMONSTRATION – On prolonge de façon linéaire et continue la formule donnée sur H_t tout entier car les ξ_t l'engendre topologiquement.

Vérifions que le π_t obtenu est une représentation orthogonale :

On a

$$\langle \pi_t(g)(\xi_t) | \pi_t(g)(\eta_t) \rangle = \langle (\alpha(g)\xi)_t | (\alpha(g)\eta)_t \rangle = \exp(-t\|\alpha(g)\xi - \alpha(g)\eta\|^2) = \exp(-t\|\xi - \eta\|^2) = \langle \xi_t | \eta_t \rangle$$

Et ceci se prolonge sur tout H_t par linéarité et continuité.

De plus, on a

$$\pi_t(gh)(\xi_t) = (\alpha(gh)\xi)_t = (\alpha(g) \circ \alpha(h)\xi)_t = \pi_t(g)(\alpha(h)\xi)_t = \pi_t(g) \circ \pi_t(h)\xi_t$$

□

Montrons maintenant que en prenant une somme de ces représentations, on a presque des vecteurs invariants.

On commence par un lemme technique :

LEMME 5 – Soit A une partie bornée de \mathcal{H} , et son image par γ_t sera noté A_t . Alors A_t est bornée pour tout $t > 0$ et $\lim_{t \rightarrow 0} \text{diam}(A_t) = 0$.

DÉMONSTRATION – Pour $x, y \in A$, on a

$$\|x_t - y_t\|^2 = 2 - 2\exp(-t\|x - y\|^2) \leq 2\{1 - \exp[-t\text{diam}(A)^2]\},$$

d'où $[\text{diam}(A_t)]^2 \leq 2\{1 - \exp[-t(\text{diam}A)^2]\} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$. □

PROPOSITION 10 – Soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs qui tend vers 0. On notera H_n à la place de H_{t_n}, \dots . Alors la représentation $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \pi_n$ de G dans $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H_n$ possède presque des vecteurs invariants.

DÉMONSTRATION – Soient $\varepsilon > 0$ et une partie compacte $K \subset G$, quitte à rajouter le rajouter, on suppose que K contient l'élément unité.

Soit $\xi \in \mathcal{H}$, le lemme précédent nous montre qu'il existe un entier m tel que $\text{diam}[(\alpha(K)\xi)_m] < \varepsilon$. Le vecteur unité $\xi_m \in H_m$ est alors (ε, K) -invariant pour π_m , car : $\|\pi_m(g)\xi_m - \xi_m\| = \|(\alpha(g)\xi)_m - \xi_m\| \leq \text{diam}[(\alpha(K)\xi)_m] < \varepsilon$ pour tout $g \in K$. Comme π_m est une sous-représentation de $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \pi_n$, on a le résultat. □

Pour finir la preuve, il faut voir si on peut remonter des représentations π_t à l'action affine α .

En fait on a le résultat suivant :

PROPOSITION 11 – Soit $t > 0$. Pour que l'action α possède un point fixe, il faut et il suffit que la représentation π_t possède des vecteurs invariants non nuls.

Mais pour cela commençons par un autre lemme technique, où contrairement au précédent, on va regarder ce qui se passe vers l'infini en laissant fixé t .

LEMME 6 – Soit ξ_p une suite de points de \mathcal{H} tendant vers l'infini, id est $\lim_{p \rightarrow \infty} \|\xi_p - \xi\| = \infty$ pour tout $\xi \in \mathcal{H}$. Soit $t > 0$, alors la suite $(\xi_p)_t$ tend faiblement vers 0 dans H_t , c'est-à-dire que $\lim_{p \rightarrow \infty} \langle (\xi_p)_t | y \rangle = 0$ pour tout $y \in H_t$.

DÉMONSTRATION – Soit $\varepsilon > 0$ et $y \in H_t$. Comme les ξ_t engendrent topologiquement H_t , on peut trouver des points η_1, \dots, η_m de \mathcal{H} et des coefficients $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tels que $\|y - \sum \lambda_i(\eta_i)_t\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Alors en utilisant Cauchy-Schwartz et le fait que les $(\xi_p)_t$ sont des vecteurs unités, on obtient :

$$|\langle (\xi_p)_t | y \rangle| \leq |\langle (\xi_p)_t | y - \sum \lambda_i(\eta_i)_t \rangle| + \sum |\lambda_i| |\langle (\xi_p)_t | (\eta_i)_t \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum |\lambda_i| \exp(-t \|\xi_p - \eta_i\|^2).$$

D'où le résultat pour p assez grand car la suite ξ_p tend vers l'infini. \square

Maintenant, on peut prouver la proposition :

DÉMONSTRATION – Si ξ est un point fixe de α , alors ξ_t est un vecteur unité de H_t fixe par π_t .

Réciproquement, supposons que la représentation π_t possède un vecteur unité invariant non nul $\eta \in H_t$. Par l'absurde, supposons que α n'ait pas de point fixe. Soit $\xi \in \mathcal{H}$, l'orbite $\alpha(G)\xi$ n'est donc pas bornée, donc il existe une suite g_p d'éléments de G telle que la suite $(\alpha(g_n)\xi)$ tende vers l'infini dans H_t . On a donc :

$$0 = \lim_{p \rightarrow \infty} \langle (\alpha(g_n)\xi)_t | \eta \rangle = \lim_{p \rightarrow \infty} \langle \pi_t(g_n)\xi_t | \eta \rangle = \lim_{p \rightarrow \infty} \langle \xi_t | \pi_t(g_n^{-1})\eta \rangle = \langle \xi_t | \eta \rangle$$

Le vecteur non nul $\eta \in H_t$ est donc orthogonal à ξ_t pour tout $\xi \in \mathcal{H}$, c'est absurde car H_t est engendré topologiquement par ceux-là! \square

Recollons les morceaux pour obtenir $(T)_{\mathbb{R}} \Rightarrow (FH)_{\mathbb{R}}$:

La représentation $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \pi_n$ possède presque des vecteurs invariants, donc si G à la propriété $(T)_{\mathbb{R}}$, alors elle possède un vecteur invariant non nul η . Soit m un entier tel que la composante $\eta_m \in H_m$ soit non nulle, alors c'est un vecteur invariant non nul pour π_m . D'où α possède un point fixe.

Bibliographie

Pour cet exposé, on pourra consulter [HV], [Gui], [Eym].

Bibliographie générale

- [Ben] D. J. Benson, *Representations and cohomology – II : Cohomology of groups and modules*, Cambridge studies in advanced mathematics, 1991.
- [Bour] N. Bourbaki, *Algèbre*, chapitre 8.
- [Bre] G. Bredon, *Topology and Geometry*, GTM, Springer, 1993.
- [Brown] K. S. Brown, *Cohomology of groups*, Springer, 1982.
- [DR] G. De Rham, *Variétés différentiables, formes, courants. Formes harmoniques*, Hermann (1955).
- [ES] S. Eilenberg, N. Steenrod, *Foundations of algebraic topology*, Princeton University Press, Princeton, 1952.
- [Eym] P. Eymard, *Moyennes invariantes et Représentations unitaires*, Lecture Notes in Mathematics 300, Springer-Verlag, 1972.
- [Farb] B. Farb, K. Dennis, *Noncommutative algebra*, Springer GTM 144, 1993.
- [GH] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley, New York (1978).
- [Godb] C. Godbillon, *Éléments de topologie algébrique*, Hermann (1971).
- [Gode] R. Godement, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, Paris (1958).
- [Groth] A. Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tôhoku Math. J., **9** (1957), p. 119–221.
- [Gru] Gruenberg, *Cohomological topics in Group Theory*, Springer (1970).
- [Gui] A. Guichardet, *Symmetric Hilbert spaces and related topics*, Lecture Notes in Mathematics 261, Springer-Verlag, 1972.
- [Hil] Peter J. Hilton, U. Stammbach, *A Course in homological algebra*, Springer, 1971.
- [Hir] M. W. Hirsch, *Differential topology*, Springer (1976).
- [Hoch] G. Hochschild, *The structure of Lie groups*, Holden-Day, San Francisco, 1965.
- [HV] P. de la Harpe et A. Valette, *La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts*, Astérisque 175, Société Mathématique de France, 1989.
- [LW] A. T. Lundell et S. Weingram, *The Topology of CW-Complexes*, Van Nostrand Reinhold, 1969.
- [Mas1] W. S. Massey, *Singular Homology Theory*, GTM **70**, Springer (1980), Appendix A.

- [Mas2] W. S. Massey, *Homology and Cohomology Theory : An Approach Based on Alexander-Spanier Cochains*, Dekker (1978), 381–410.
- [Mil1] J. W. Milnor, *Construction of universal bundles, I*, Ann. of Math. **63** (1956), 272–284.
- [Mil2] J. W. Milnor, *Construction of universal bundles, II*, Ann. of Math. **63** (1956), 430–436.
- [Rob] Robinson, *Course on Group Theory*, Springer GTM 80, 1982.
- [Sch] Pierre Schapira, *An Introduction to Categories and Homological Algebra*, cours de l'Université Paris 6, <http://www.math.jussieu.fr/~schapira/publications/>
- [Serre] J.-P. Serre, *Corps locaux*, Hermann, 1962.
- [Spa] Edwin H. Spanier, *Algebraic Topology*, deuxième édition, Springer, 1989.
- [Spi] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry*, Publish or Perish (1970), Appendix.
- [Ver] Jean-Louis Verdier, *Des catégories dérivées des catégories abéliennes*, thèse, *Astérisque* **239** (1996).
- [Poin] *Poincaré philosophe et mathématicien*, Pour La Science, Les génies de la Science (août-novembre 2000).