

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON
UNITÉ DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

Le Hasard et la Courbure

Yann Ollivier

Mémoire déposé en vue d'obtenir le diplôme
d'habilitation à diriger des recherches

présenté le 28 mai 2009 à l'École normale supérieure de Lyon

Jury :

M. Dominique Bakry
M. Persi Diaconis (rapporteur)
M. Étienne Ghys
M. Mikhail Gromov (rapporteur)
M. Michel Ledoux (rapporteur)
M. Robert J. McCann
M. Pierre Pansu

Le Hasard et la Courbure
Randomness and Curvature

Avant-propos

La démarche commune à la plupart des travaux présentés ici est l'étude géométrique d'objets quelconques, typiques, ou irréguliers. La typicité est obtenue par l'utilisation, à un endroit ou à un autre, d'ingrédients aléatoires. Cela peut signifier que l'objet a été obtenu par tirage aléatoire dans sa classe, par perturbation aléatoire autour d'un modèle mieux compris, ou bien qu'un objet est fixé mais suffisamment inconnu pour que le seul point d'attaque consiste à l'observer aléatoirement.

Un des objectifs de cette géométrie « synthétique » ou « robuste » est d'obtenir des arguments qui, lorsqu'ils s'appliquent à un espace, s'appliquent aussi bien à des espaces « proches ». Ces derniers peuvent être, par exemple, des espaces discrets comme un graphe, ou bien des variétés dont la géométrie a un grand nombre de fluctuations ou d'irrégularités à très petite échelle.

Le premier invariant géométrique que l'on rencontre en s'éloignant de l'espace euclidien est la notion de courbure, qui apparaîtra souvent dans ces pages. On peut sommairement diviser son influence en deux continents : celui de la courbure négative (ou majorée), et celui de la courbure positive (ou minorée). L'un comme l'autre seront aperçus ici, mais d'aucun des deux, je ne peux prétendre à une vue d'ensemble.

D'où « Le Hasard et la Courbure ».

Cette démarche sera appliquée à trois domaines bien différents. Dans le premier, il s'agit de *groupes aléatoires*, dont le comportement donne des indications sur ce que peut être un groupe quelconque, par opposition aux groupes classiques bien connus. Ici c'est la courbure négative qui domine : les groupes aléatoires sont *hyperboliques*, et beaucoup des propriétés qu'on leur connaît tournent autour de ce fait.

Dans le second, nous adopterons un point de vue géométrique sur les *chaînes de Markov*. On verra en particulier comment utiliser ces dernières pour définir une notion de *courbure (de Ricci)* sur des espaces métriques quelconques, qui permet d'étendre certaines propriétés classiques des variétés de courbure positive, comme la concentration de la mesure.

Enfin, la troisième partie, physique plus que mathématique, traite de *relativité générale* : l'équation d'Einstein lie la courbure au contenu en matière de l'espace-temps, et des fluctuations aléatoires à petite échelle, nulles en moyenne et non observées, peuvent avoir un effet non trivial sur la courbure à grande échelle de l'Univers. Cet effet physique de « matière apparente » est étudié dans différentes situations.

Comme le précisent les décrets, ce mémoire d'habilitation se compose d'un document de synthèse ainsi que d'un dossier de travaux scientifiques. Ce dernier reprend presque tous mes articles, y compris ceux de ma thèse (certains travaux ultérieurs en dépendant fortement), ainsi que le texte de mon petit livre sur les groupes aléatoires.

J'ai fait figurer, en tête du texte de synthèse, une table synoptique des principaux résultats, tentant de résumer chacun en une phrase. L'exercice n'est pas aussi réussi que je l'aurais souhaité, mais je l'espère utile.

Foreword

The common idea underlying the various works presented here is a geometric study of generic, typical, or irregular objects. Typicality is achieved through the use of random ingredients at one point or another. The object under scrutiny may have been picked at random in its class, or be a random perturbation of a smoother, more symmetric model, or just be a plain metric space with no particular features, for which random measurements provide the only reasonable approach.

One of the goals of this “coarse” or “robust” geometry is to develop geometric arguments that remain valid when considering objects that are “close” to a given one. The perturbed object might not be regular; typical examples include discrete spaces like graphs, or manifolds with many small fluctuations in their metric.

When departing from Euclidean space, the first geometric invariant encountered is curvature; this notion will pervade our work. Its influence can be broadly divided into two realms: that of positive curvature (or bounded below), and that of negative curvature (or bounded above), which entail very different behaviors. Glimpses of each will be given here, but I cannot pretend to a global view of either.

Hence “Randomness and Curvature”.

Three fairly different applications will be used to illustrate these principles. *Random groups* will come first. Their behavior hints at what a “generic” group looks like, as opposed to the more classical groups we all learn about. Random groups belong with negatively curved spaces: they are *hyperbolic*, and most of their known features arise from hyperbolicity.

Next, we will develop a geometric viewpoint on *Markov chains*, and see how random walk considerations lead to a notion of (*Ricci*) *curvature* on arbitrary metric spaces. Several classical properties of positively curved manifolds, such as concentration of measure, extend to this setting.

A bit of *general relativity* will come last; our treatment there will be physical rather than mathematical. The Einstein equation relates the matter content of space-time to its curvature in a non-linear way, and small, unobserved fluctuations of matter may vanish on average, yet have a non-trivial effect on the large-scale curvature and dynamics of the Universe. This physical effect of an emerging “apparent matter” is investigated in a variety of situations.

As law and custom have it, this habilitation document consists of a survey together with a compilation of works. The latter comprises almost all my articles, including those from my PhD thesis (on which some later works heavily rely), as well as the text of my short book on random groups.

I decided to begin the survey with a synoptic table of results, each condensed to one sentence. This has proven harder to write than I expected; still, I hope it is not totally useless.

Curriculum vitæ sommaire

1978	Naissance.
1997–2001	Scolarité à l'École normale supérieure de Paris.
2001–2004	Thèse à l'Université Paris-Sud (Orsay), sous la direction de Misha Gromov et Pierre Pansu.
2004–...	Chargé de recherche à l'UMPA, École normale supérieure de Lyon.

Remerciements

Mes remerciements vont tout d'abord au CNRS, qui nous permet de travailler librement et dans de bonnes conditions. Je souhaite que cela soit le cas longtemps encore.

À l'UMPA, on a la chance de côtoyer chaque jour des personnalités d'une richesse exceptionnelle tant d'un point de vue humain que scientifique. Ajoutons que la communication en particulier entre différents sous-domaines des mathématiques, est inégalée ailleurs. Virtuellement tous les membres du laboratoire m'ont apporté à l'occasion leurs connaissances, leur compagnie ou les deux ; sans parler de l'aide de secrétaires remarquablement dévouées. Je veux remercier tous ces collègues, dont l'influence directe ou indirecte sur les travaux ici présentés est évidente.

Je tiens à saluer bien bas mes rapporteurs, Persi Diaconis, Misha Gromov (sans qui, tout bonnement, les objets et le point de vue mathématique utilisés ici n'existeraient pas) et Michel Ledoux, qui ont dû ingérer un lourd document en un temps assez court ; ainsi que les autres membres de mon jury, Dominique Bakry, Étienne Ghys, Robert McCann, Pierre Pansu, pour l'honneur qu'ils me font de s'intéresser à mon travail, parfois depuis fort longtemps. Car l'intérêt des collègues est une des gratifications essentielles de notre métier.

Enfin, merci à tous mes coauteurs, Fabrice, Dani, Pierre, Claire, Aldéric, Cédric, pour le plaisir de travailler ensemble ; que l'on me permette d'ajouter que certains sont bien plus que de simples collaborateurs.

Table des matières

Contents

Avant-propos	4
Foreword	
Curriculum vitæ sommaire	6
Remerciements	7
Liste des travaux reproduits	9
Table synoptique des résultats	10
Synoptic table of results	
Présentation	14
Les courbures en géométrie riemannienne	14
Courbures discrètes I : courbure sectionnelle négative	21
Courbures discrètes II : courbure de Ricci positive	29
Courbure à grande échelle : physique statistique relativiste	44
Références	50
Dossier scientifique	53

Liste des travaux

reproduits dans ce mémoire

<i>A January 2005 Invitation to Random Groups</i>	55
Ensaïos Matemáticos 10 , Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro (2005)	
<i>Sharp phase transition theorems for hyperbolicity of random groups</i>	129
GAFA, Geom. Funct. Anal. 14 (2004), n°3, 595–679	
<i>Effondrement de quotients aléatoires de groupes hyperboliques avec torsion</i>	211
C. R. Math. Acad. Sci. Paris 341 (2005), n°3, 137–140	
<i>Cogrowth and spectral gap of generic groups</i>	217
Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 55 (2005), n°1, 289–317	
<i>Growth exponent of generic groups</i>	241
Comment. Math. Helv. 81 , (2006), n°3, 569–593	
<i>Some small cancellation properties of random groups</i>	267
Internat. J. Algebra Comput. 17 (2007), n°1, 37–51	
<i>Cubulating groups at density 1/6</i>	285
With Daniel T. Wise	
En révision pour Trans. Amer. Math. Soc.	
<i>On a small cancellation theorem of Gromov</i>	323
Bull. Belg. Math. Soc. 13 (2006), n°1, 75–89	
<i>Kazhdan groups with infinite outer automorphism group</i>	341
With Daniel T. Wise	
Trans. Amer. Math. Soc. 359 (2007), n°5, 1959–1976	
<i>Ricci curvature of Markov chains on metric spaces</i>	365
J. Funct. Anal. 256 (2009), n°3, 810–864	
<i>Finding related pages using Green measures: An illustration with Wikipedia</i>	427
With Pierre Senellart	
Proc. AAAI 2007, 1427–1433	
<i>Rate of convergence of crossover operators</i>	443
Random Struct. Algor. 23 (2003), n°1, 58–72.	
<i>Large-scale non-linear effects of fluctuations in relativistic gravitation</i>	461
With Claire Chevalier and Fabrice Debbasch	
À paraître dans Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications	
<i>Multiscale cosmological dynamics</i>	469
With Claire Chevalier and Fabrice Debbasch	
Soumis pour publication	
<i>Observing a Schwarzschild black hole with finite precision</i>	481
With Fabrice Debbasch	
Astron. Astrophys. 433 (2005), n° 2, 397–404	

Table synoptique des résultats

Synoptic table of results

Théorie géométrique des groupes

Geometric group theory

RÉSULTAT 1.

Un quotient d'un groupe hyperbolique sans torsion par des éléments choisis au hasard dans une très grande boule, est encore un groupe hyperbolique sans torsion, non trivial en densité inférieure à $1/2$.

RESULT 1.

A quotient of a torsion-free hyperbolic group by random elements chosen in a large enough ball, is still torsion-free hyperbolic, and non-trivial in density less than $1/2$.

Sharp phase transition theorems for hyperbolicity of random groups, Theorem 3

RÉSULTAT 2.

Un quotient d'un groupe hyperbolique sans torsion par des mots aléatoires en les générateurs, est encore un groupe hyperbolique sans torsion, non trivial en densité inférieure à une certaine densité critique. La densité critique est donnée par l'exposant de retour en e de la marche aléatoire dans le groupe.

RESULT 2.

A quotient of a torsion-free hyperbolic group by randomly chosen words in the generators, is still torsion-free hyperbolic, and non-trivial up to some critical density. The critical density is given by the return exponent of the random walk in the group.

Sharp phase transition theorems for hyperbolicity of random groups, Theorem 4

RÉSULTAT 3.

Dans le théorème ci-dessus, l'exclusion de la torsion est nécessaire; en présence de torsion, la densité critique peut être plus basse.

RESULT 3.

In the theorem above, torsion-freeness is necessary; in case of torsion, the critical density can be lower than expected.

Effondrement de quotients aléatoires de groupes hyperboliques avec torsion, Théorème 1

RÉSULTAT 4.

L'exposant de retour en e de la marche aléatoire dans un groupe hyperbolique sans torsion, n'est (presque) pas modifié par quotient aléatoire. En particulier, le trou spectral d'un groupe aléatoire est proche de celui d'un groupe libre.

RESULT 4.

The return exponent of the random walk in a torsion-free hyperbolic group, is (almost) invariant under a random quotient. In particular, the spectral gap in a random group is close to that in a free group.

Cogrowth and spectral gap of generic groups, Theorems 1 and 2

RÉSULTAT 5.

L'exposant de croissance d'un groupe hyperbolique sans torsion, n'est (presque) pas modifié par quotient aléatoire. En particulier, l'exposant de croissance d'un groupe aléatoire est très proche de celui d'un groupe libre.

RESULT 5.

The growth exponent of a torsion-free hyperbolic group, is (almost) invariant under a random quotient. In particular, the growth exponent of a random group is close to that of a free group.

Growth exponent of generic groups, Theorems 1 and 2

RÉSULTAT 6.

Dans un groupe hyperbolique, il est possible d'approximer l'exposant de croissance en se restreignant à une boule de rayon pas trop grand. En particulier, cet exposant de croissance est algorithmiquement calculable étant donné une présentation d'un groupe hyperbolique.

Growth exponent of generic groups, Proposition 17 and Corollary 18

RÉSULTAT 7.

Dans un groupe hyperbolique, l'exposant de retour de la marche aléatoire peut être explicitement approché en se restreignant à des mots aléatoires assez longs. En particulier, cet exposant de retour est algorithmiquement calculable étant donné une présentation d'un groupe hyperbolique.

Cogrowth and spectral gap of generic groups, Proposition 8

RÉSULTAT 8.

Dans un groupe, il est bien connu qu'une inégalité isopérimétrique linéaire vraie sur des mots assez longs implique une inégalité isopérimétrique linéaire sur tous les mots (et donc l'hyperbolicité). Nous montrons que si l'on écrit l'inégalité isopérimétrique de la bonne manière, ceci peut se faire avec une perte arbitrairement faible dans la constante isopérimétrique.

Some small cancellation properties of random groups, Theorem 8

RÉSULTAT 9.

Un groupe aléatoire en densité $d < 1/2$ satisfait une inégalité isopérimétrique avec constante $1 - 2d$. En particulier on a la δ -hyperbolicité avec $\delta \leq 4\ell/(1 - 2d)$.

Some small cancellation properties of random groups, Theorem 2 and Corollary 3

RÉSULTAT 10.

Dans un groupe aléatoire en densité $d < 1/5$, l'algorithme de Dehn pour le problème du mot est valable ; il ne l'est pas si $d > 1/5$.

Some small cancellation properties of random groups, Theorem 6

RÉSULTAT 11.

Un groupe aléatoire en densité $d < 1/5$ ne satisfait pas la propriété T de Kazhdan.

RESULT 6.

In a hyperbolic group, the growth exponent computed in a (not too) large enough ball is an explicit approximation of that of the whole group. In particular, this growth exponent is algorithmically computable given a presentation of a hyperbolic group.

RESULT 7.

In a hyperbolic group, the return exponent of the random walk can be explicitly approximated using random words of a given, not too large length. In particular, this return exponent is algorithmically computable given a presentation of a hyperbolic group.

RESULT 8.

Given a group presentation, it is known that a linear isoperimetric inequality valid for large enough words implies a linear isoperimetric inequality for all words (hence hyperbolicity). We show that if the isoperimetric inequality is written in a suitable way, this can be done with arbitrarily small loss in the isoperimetric constant.

RESULT 9.

A random group at density $d < 1/2$ satisfies an isoperimetric inequality with constant $1 - 2d$. In particular, the δ -hyperbolicity constant satisfies $\delta \leq 4\ell/(1 - 2d)$.

RESULT 10.

In a random group at density $d < 1/5$, the Dehn algorithm for the word problem terminates, whereas it does not if $d > 1/5$.

RESULT 11.

Random groups at density $d < 1/5$ do not have Kazhdan's property T .

Cubulating groups at density 1/6, Corollary 51

RÉSULTAT 12.

Un groupe aléatoire en densité $d < 1/6$ agit librement et cocompactement sur un complexe cubique CAT(0) et possède la propriété de Haagerup.

RESULT 12.

Random groups at density $d < 1/6$ act freely and cocompactly on a CAT(0) cube complex and have the Haagerup property.

Cubulating groups at density 1/6, Theorem 62 and Corollary 56

RÉSULTAT 13.

La technique de « présentations graphiques » de Gromov permet de construire des groupes ayant la propriété (T) et qui sont, au choix, non hopfiens, non co-hopfiens, ou dont le groupe d'automorphismes extérieurs est infini.

RESULT 13.

Gromov's "graphical presentation" tool allows to construct groups with property (T) which are, respectively, not Hopfian, not co-Hopfian, or with infinite outer automorphism group.

Kazhdan groups with infinite outer automorphism group, Theorems 1.2, 1.3 and 1.4

Chaînes de Markov, concentration, courbure de Ricci Markov chains, concentration, Ricci curvature

RÉSULTAT 14.

On peut définir une courbure de Ricci sur les espaces métriques mesurés, même discrets ; cette courbure est positive si les petites boules sont plus proches (en distance de transport) que leurs centres. Cette notion redonne la courbure de Ricci sur les variétés riemanniennes, est compatible avec celle de Bakry–Émery, et attribue une courbure positive à des espaces tels que le cube discret.

RESULT 14.

One can define a notion of Ricci curvature for metric measure spaces, including discrete spaces; this curvature is positive when small balls are closer (in transportation distance) than their centers are. This notion gives back the usual Ricci curvature of a Riemannian manifold and is consistent with Bakry–Émery theory; such spaces as the discrete cube are positively curved.

Ricci curvature of Markov chains on metric spaces, Definition 3 and Examples 7, 8 and 11

RÉSULTAT 15.

Comme dans le cas riemannien, la stricte positivité de la courbure de Ricci discrète permet :

- de contrôler le diamètre (th. de Bonnet–Myers) ;
- de contrôler le trou spectral du laplacien (th. de Lichnerowicz) ;
- d'obtenir la concentration de la mesure (th. de Lévy–Gromov) ;
- d'obtenir la contraction de gradient par le flot de la chaleur et une inégalité de Sobolev logarithmique (th. de Bakry–Émery).

RESULT 15.

As in the Riemannian case, positive Ricci curvature in the sense above implies:

- a diameter control (Bonnet–Myers thm.);
- a spectral gap estimate (Lichnerowicz thm.);
- concentration of measure (Lévy–Gromov thm.);
- gradient contraction by the heat equation, and a logarithmic Sobolev inequality (Bakry–Émery thms.).

Ricci curvature of Markov chains on metric spaces, Propositions 23 and 30 and Theorems 33, 44 and 45

RÉSULTAT 16.

L'utilisation de fonctions de Green discrètes permet de définir quantitativement une notion de voisinage dans un graphe ou une chaîne de Markov. Appliquée au graphe des liens internes de Wikipédia, cette stratégie permet de renvoyer automatiquement une liste d'articles de Wikipédia « sur le même sujet » qu'un article donné.

RESULT 16.

Discrete Green functions allow to define a quantitative notion of neighborhood in a graph or a Markov chain. When tested on the graph of internal links of Wikipedia, this provides a fully automated way of listing articles “related to” a given Wikipedia article.

Finding related pages using Green measures: An illustration with Wikipedia

RÉSULTAT 17.

Dans une population finie se reproduisant par reproduction sexuée avec choix aléatoire du partenaire dans toute la population, le brassage des gènes est exponentiellement rapide, mais l'équilibre atteint diffère du modèle d'une population infinie par un terme décroissant comme l'inverse de la taille de la population.

RESULT 17.

In a finite population evolving through sexual reproduction with random choice of the mate in the population, genes get mixed exponentially fast, but the final equilibrium differs from the ideal model of an infinite population by an amount inversely proportional to population size.

Rate of convergence of crossover operators, Theorems 4 and 8

Physique statistique relativiste General relativistic statistical physics

RÉSULTAT 18.

Des ondes gravitationnelles actuellement indétectables pourraient avoir un effet très important sur la dynamique globale de l'univers. Par contre, les effets globaux de fluctuations de la densité de matière seraient plus faibles.

RESULT 18.

Currently undetectable gravitational waves could have considerable effect on the dynamics of the Universe. In contrast, fluctuations of the density of matter seem to have a much smaller effect.

*Large-scale non-linear effects of fluctuations in relativistic gravitation
& Multiscale cosmological dynamics*

RÉSULTAT 19.

Des imprécisions dans l'observation d'un trou noir donnent à croire qu'il est entouré de matière d'énergie négative.

RESULT 19.

Imprecision when observing a black hole yields the impression that it is surrounded with “apparent matter” of negative energy.

Observing a Schwarzschild black hole with finite precision

Présentation

Comme signalé dans l'avant-propos, beaucoup des travaux de ce mémoire utilisent la notion de courbure, soit directement, soit pour s'en inspirer. Il est donc utile de passer un peu de temps à examiner cette notion.

Notre objectif n'est pas de reproduire un cours de géométrie riemannienne, cours auquel nous référons le lecteur pour le détail des définitions. Nous nous attarderons néanmoins sur l'intuition que l'on peut avoir des différents objets en jeu, intuition souvent passée sous silence. On pourra consulter par exemple [Car92] pour une première approche, ou [Ber03] pour un impressionnant survol des différents aspects de la géométrie riemannienne.

1 Les courbures en géométrie riemannienne

Variétés riemanniennes. Rappelons que l'archétype d'une variété riemannienne est une surface plongée dans l'espace euclidien. Plus généralement, toute variété (lisse) peut être vue comme un ensemble $X \subset \mathbb{R}^p$ tel qu'en tout point, il existe un sous-espace affine de dimension N dans \mathbb{R}^p qui coïncide avec X au premier ordre. Ce sous-espace est appelé *espace tangent* $T_x X$ au point $x \in X$ considéré, et N est la *dimension* de X .

Remarquons que si $c(t)$ est une courbe lisse dans X , alors la dérivée $dc(t)/dt$ est un vecteur tangent à M en $c(t)$.

Une variété est *riemannienne* si elle est en outre équipée d'une *métrique riemannienne*, c'est-à-dire, en chaque point x , d'une forme quadratique définie positive sur l'espace tangent $T_x X$. Cela peut être par exemple, si $X \subset \mathbb{R}^p$, la restriction à $T_x X$ d'une structure euclidienne sur \mathbb{R}^p .

Une telle forme quadratique permet d'attribuer une norme à tout vecteur tangent, et, par intégration, de définir la longueur d'une courbe dans X . La distance (dans X) entre deux points de X est alors définie comme l'infimum des longueurs des courbes les joignant, ce qui fait de X un espace métrique.

On supposera toujours que X est connexe ainsi que complet pour cette métrique.

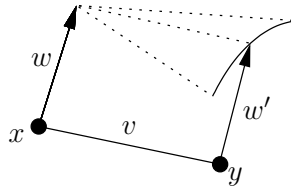
Une *géodésique* est une courbe γ dans X telle que, étant donné deux points de γ assez proches l'un de l'autre, γ réalise la distance entre ces deux points. Localement, de telles courbes existent toujours. De plus, étant donné un point $x \in X$ et un vecteur tangent $v \in T_x M$, il existe exactement une géodésique issue de x ayant v comme vitesse initiale, qu'on appellera géodésique issue de v .

On appellera *extrémité* de v , et on notera $\exp_x v$, le point obtenu en suivant cette géodésique pendant un temps unité.

Transport parallèle. Supposons que l'on ait deux points x et y très proches dans une variété riemannienne. A-t-on un moyen de comparer un vecteur tangent en x à

un vecteur tangent en y , qui vivent *a priori* dans deux espaces différents? C'est ce qu'autorise la notion de *transport parallèle*.

Puisque x et y sont très proches, on peut supposer que y est l'extrémité d'un vecteur tangent v en x . Maintenant, supposons qu'on ait un autre vecteur tangent w en x , très petit lui aussi, et supposons, pour simplifier, que w est orthogonal à v . Il existe alors un vecteur tangent particulier w' en y : celui dont l'extrémité est la plus proche de celle de w , parmi tous les vecteurs tangents en y orthogonaux à v (si on supprime cette condition d'orthogonalité, bien sûr, on peut trouver un vecteur tangent en y dont l'extrémité est exactement la même que celle de w , mais ce vecteur « revient vers x »). C'est le meilleur candidat à être le vecteur tangent en y qui soit « le même » que w .



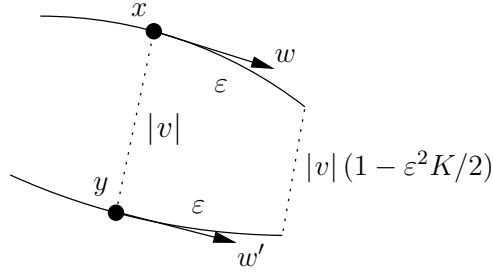
On appelle ce vecteur w' le *transporté parallèle* de w le long de v (plus exactement, le transport parallèle est la linéarisation de cette opération, c'est-à-dire qu'on suppose w très petit et qu'on étend ensuite par linéarité). On peut lever la condition d'orthogonalité à v en décidant que par définition, le transporté parallèle de v le long de lui-même est le vecteur tangent en y à la géodésique issue de v .

Plus généralement, on peut définir le transport parallèle de w le long d'une courbe issue de x en décomposant la courbe en intervalles très petits et en faisant des transports parallèles successifs le long de ces intervalles.

Courbure sectionnelle et courbure de Ricci. Passons maintenant à la courbure, en commençant par la première de ses variantes, la courbure sectionnelle.

Reprenons notre point x , notre vecteur tangent v d'extrémité y , notre vecteur tangent w en x et son transporté parallèle w' . Si la variété est l'espace euclidien, les extrémités x' et y' de w et w' forment, avec x et y , un rectangle. Mais, dans une variété riemannienne quelconque, ce n'est plus le cas.

En effet, les deux géodésiques issues de w et w' vont, en présence de courbure, avoir tendance à se rapprocher ou à s'éloigner. Ainsi sur la sphère (courbure positive), deux méridiens issus de points très proches de l'équateur se rencontrent aux pôles. Comme w et w' sont parallèles, cet effet est du second ordre en la distance parcourue.



Considérons ainsi la distance entre les points situés à distance ε de x ou y sur les géodésiques issues respectivement de w et w' . Cette distance serait égale à $|v|$ dans le cas euclidien, et on utilise la différence pour mesurer une courbure.

DÉFINITION 1 (COURBURE SECTIONNELLE).

Soit (X, d) une variété riemannienne. Soient v et w des vecteurs tangents unitaires en un point $x \in X$. Soient $\varepsilon, \delta > 0$. Soit y l'extrémité de δv et soit w' le transporté parallèle de w de x vers y . Alors

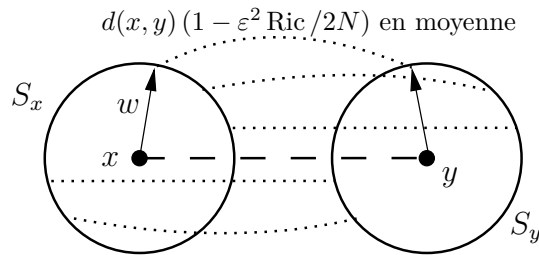
$$d(\exp_x \varepsilon w, \exp_y \varepsilon w') = \delta \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} K(v, w) + O(\varepsilon^3 + \varepsilon^2 \delta) \right)$$

lorsque $(\varepsilon, \delta) \rightarrow 0$. La quantité $K(v, w)$ ainsi définie est appelée courbure sectionnelle dans les directions (v, w) .

La courbure de Ricci, elle, ne dépend que d'un seul vecteur tangent v et est obtenue en moyennant sur toutes les directions w .

DÉFINITION 2 (COURBURE DE RICCI).

Soit x un point d'une variété riemannienne de dimension N . Soit v un vecteur tangent en x . On appelle courbure de Ricci le long de v , la quantité $\text{Ric}(v)$ égale à N fois la moyenne de $K(v, w)$ où la moyenne est prise sur w parcourant la sphère unité de l'espace tangent en x .



Le facteur N provient de la définition traditionnelle de la courbure de Ricci comme une trace, qui fournit une somme sur une base plutôt qu'une moyenne sur la sphère. De plus, il se trouve que $\text{Ric}(v)$ est une forme quadratique en v , que nous noterons donc plutôt $\text{Ric}(v, v)$.

On peut reformuler cette définition de la manière suivante.

COROLLAIRE 3.

Soit v un vecteur tangent unitaire en un point x d'une variété riemannienne. Soient $\varepsilon, \delta > 0$ et soit y l'extrémité de δv .

Soit S_x l'ensemble des extrémités des vecteurs tangents en x de norme ε , et, de même, S_y l'ensemble des extrémités de la sphère de rayon ε dans l'espace tangent en y . Alors, si l'on envoie S_x sur S_y par transport parallèle, en moyenne les points sont déplacés d'une distance

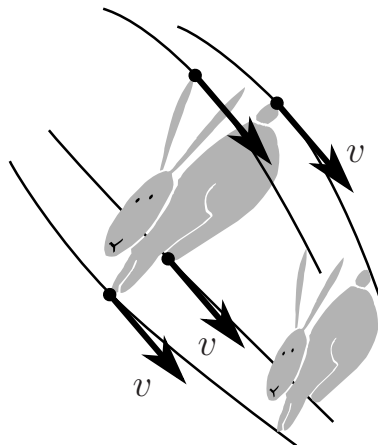
$$\delta \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2N} \operatorname{Ric}(v, v) + O(\varepsilon^3 + \varepsilon^2 \delta) \right)$$

lorsque $(\varepsilon, \delta) \rightarrow 0$.

Si les sphères sont remplacées par des boules, le facteur $\frac{\varepsilon^2}{2N}$ devient $\frac{\varepsilon^2}{2(N+2)}$.

En particulier, la courbure de Ricci est positive si « les boules sont plus proches que leurs centres ». On verra que cette propriété s'adapte très bien à des espaces beaucoup plus généraux.

Mentionnons au passage une autre manière, plus dynamique, de visualiser la courbure de Ricci. Soit à nouveau un vecteur tangent unitaire v en un point x d'une variété riemannienne X . Soit C un petit voisinage de x , que l'on peut choisir d'une forme quelconque. Pour tout point z de C , considérons la géodésique z_t issue de z et ayant v pour vitesse initiale (où v a été préalablement amené en z par transport parallèle). On a vu qu'en moyenne, ces géodésiques se rapprochent ou s'éloignent selon le signe de la courbure. Faisons maintenant « glisser » l'ensemble C le long de ces géodésiques ; plus précisément, soit C_t l'ensemble $\{z_t, z \in C\}$.



Alors on a

$$\operatorname{vol} C_t = \operatorname{vol} C \left(1 - \frac{t^2}{2} \operatorname{Ric}(v, v) \right)$$

à des termes d'ordre supérieur près en t et en la taille de C . (Notons que la dérivée de $\operatorname{vol} C_t$ en $t = 0$ est nulle car les géodésiques considérées ont des vitesses initiales

parallèles.) Autrement dit, la courbure de Ricci contrôle la contraction des volumes par le flot géodésique.

Les signes de la courbure. Souvent en géométrie riemannienne, lorsque l'on veut travailler en courbure négative on doit supposer que toutes les courbures sectionnelles $K(v, w)$ sont négatives, et pour travailler en courbure positive on doit supposer que la courbure de Ricci $\text{Ric}(v, v)$ est positive pour tout v (ce qui est plus faible que de supposer la positivité de tous les $K(v, w)$).

Nous n'avons certainement pas l'ambition de donner une vue d'ensemble des applications de la courbure en géométrie riemannienne, aussi donnerons-nous un exemple très simple de chaque cas. En courbure de Ricci positive on a le théorème de Bonnet–Myers, qui affirme que si une variété est plus courbée que la sphère, alors son diamètre est inférieur.

THÉORÈME 4 (BONNET–MYERS).

Soit X une variété riemannienne de dimension N . Soit $\inf \text{Ric}(X)$ l'infimum de tous les $\text{Ric}(v, v)$ pour v vecteur tangent unitaire.

Soit S^N la sphère unité de dimension N dans \mathbb{R}^{N+1} . Si $\inf \text{Ric}(X) \geq \inf \text{Ric}(S^N)$, alors $\text{diam } X \leq \text{diam } S^N$.

Beaucoup de théorèmes en courbure de Ricci positive prennent la forme d'un théorème de comparaison avec la sphère. Nous reviendrons plus loin, en particulier, sur le phénomène de concentration de la mesure.

En courbure négative, mentionnons le théorème de Cartan–Hadamard, qui affirme que toute l'information topologique est contenue dans le groupe fondamental de la variété. Ceci est complètement faux en courbure positive, puisque par exemple une sphère est simplement connexe.

THÉORÈME 5 (CARTAN–HADAMARD).

Soit X une variété riemannienne de dimension N telle que $K(v, w) \leq 0$ pour tous vecteurs tangents v, w . Alors le revêtement universel de X est homéomorphe à \mathbb{R}^N .

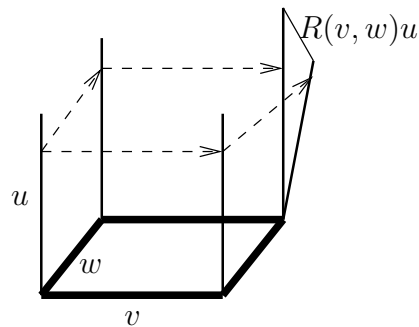
Une autre propriété du plan hyperbolique et plus généralement des variétés (simplement connexes) de courbure sectionnelle strictement négative, est que la surface d'une très grande boule est comparable à son volume (alors que par exemple, dans l'espace euclidien, la surface d'une très grande boule croît comme la puissance $2/3$ de son volume). De telles *inégalités isopérimétriques linéaires* seront très importantes dans notre étude des groupes aléatoires.

Le tenseur de courbure de Riemann. Continuons dans notre parcours des notions de la géométrie riemannienne. Le *tenseur de courbure de Riemann* prend trois vecteurs tangents u, v, w en un point x , et renvoie un nouveau vecteur tangent noté $R(v, w)u$. La notation se justifie par le fait que, à v et w fixés, l'application $u \mapsto R(v, w)u$ est une application linéaire de l'espace tangent en x dans lui-même. Avant de définir le tenseur de Riemann, discutons plus avant la notion de transport parallèle.

Lorsqu'on a deux vecteurs tangents v, w en un point x , on peut transporter v le long de w , ou transporter w le long de v , et les extrémités des vecteurs obtenus sont a priori différentes. En fait, lorsque v et w sont petits, ces deux opérations coïncident au premier ordre où il n'est pas trivial qu'elles coïncident (précisément, à l'ordre $|v||w|$ quand v, w sont petits). On appelle cette propriété l'*absence de torsion*, elle affirme qu'à cet ordre « les parallélogrammes se referment ».

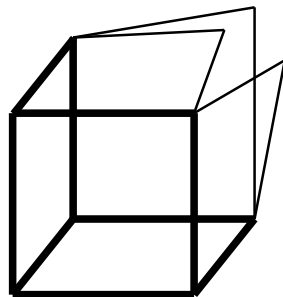
Nous avons implicitement utilisé cette propriété plus haut, puisque la définition de la courbure faisait intervenir une quantité d'ordre supérieur, précisément $|v||w|^2$.

Essayons maintenant avec trois vecteurs u, v, w . Gardons le même parallélogramme construit sur v et w , et essayons de faire le transport parallèle de u le long du chemin vw , et le long du chemin wv . Cette fois-ci, les deux résultats diffèrent, et leur différence définit la *courbure de Riemann* $R(v, w)u$, qui est à nouveau un vecteur tangent.



Ceci prouve qu'un cube ne se referme pas, contrairement à un parallélogramme.

Étudions ce problème de plus près. On a vu qu'atteindre le sommet opposé du cube produisait des résultats différents selon qu'on suivait le chemin vwu ou wvu , la différence étant précisément $R(v, w)u$. Il y a au total six chemins possibles. Néanmoins, leurs extrémités coïncident deux à deux : en effet, grâce à l'absence de torsion on a bien sûr $vw = wv$ mais aussi $uvw = uww$ qui exprime juste l'absence de torsion en l'extrémité de u . Autrement dit, « les faces latérales du cube se referment ». Sur les six chemins possibles, on n'obtient donc que trois points d'arrivée.¹



¹Avec Bruno Sévenec, nous avons pu transposer cet argument en une démonstration rigoureuse très courte, en interprétant le petit cube dans un quotient bien choisi d'un espace de jets.

Ces trois points forment un petit triangle. On a vu que l'un des côtés de ce triangle était $R(v, w)u$, et par symétrie les autres sont $R(w, u)v$ et $R(u, v)w$. La relation de Chasles dans ce triangle s'écrit donc

$$R(u, v)w + R(v, w)u + R(w, u)v = 0$$

qui est la *première identité de Bianchi*, découverte par Ricci.

Volume riemannien. Pour clore ce tour informel des bases de la géométrie riemannienne, mentionnons que la donnée d'une métrique riemannienne permet de mesurer non seulement les distances mais aussi les volumes. En effet, on peut décrire que le volume d'un petit parallélépipède orthonormé est 1.

Ceci définit une forme volume sur une variété riemannienne, que l'on note souvent $\sqrt{\det g}$ si g est la métrique. La raison de cette notation est la suivante. En un point donné, la métrique g est une forme bilinéaire sur l'espace tangent E , c'est-à-dire une application de E vers E^* . Passons aux puissances extérieures. Le déterminant $\det g = \wedge^N g$ est une application de $\wedge^N E$ dans $\wedge^N E^* \simeq (\wedge^N E)^*$. Autrement dit, $\det g$ est une forme bilinéaire sur $\wedge^N E$, qui est en outre définie positive si g l'est. Sa racine $\sqrt{\det g}$ est donc une norme sur $\wedge^N E$, c'est-à-dire exactement une forme volume.

Contrairement à ce qu'on lit souvent, la notation $\sqrt{\det g}$ n'a ainsi rien d'abusif...

Applications. Passons maintenant en revue les différents domaines d'application intervenant dans ce mémoire. D'abord, les groupes aléatoires, dont la propriété centrale est la δ -hyperbolicité (« courbure négative discrète ») et ses différentes conséquences géométriques. En ce sens, au moins dans le monde des groupes, la courbure négative est « générique ». Ensuite, nous passerons à la notion de courbure de Ricci discrète, qui permet de généraliser un certain nombre de propriétés des variétés à courbure de Ricci positive, en particulier la concentration de la mesure. Enfin, nous décrirons des travaux de physique : en relativité générale, la courbure « à grande échelle » d'une variété irrégulière diffère de la moyenne de la courbure, et ceci crée un effet physique de « matière apparente » que nous décrirons dans certaines situations, et qui peut évoquer le problème de la matière noire.

2 Courbures discrètes I : courbure sectionnelle négative

2.1 La δ -hyperbolicité

La δ -hyperbolicité, notion remontant au moins à Rips mais considérablement développée par Gromov [Gro87], est une des principales propriétés utilisées pour généraliser la courbure sectionnelle négative, et s'est révélée particulièrement fructueuse pour l'étude de certains groupes discrets, exemples sur lesquels nous nous concentrons. Les principaux résultats sur ces *groupes hyperboliques* sont déjà présents dans [Gro87], tandis que le livre [GhH90] y donne une introduction. Le texte très complet [BH99] traite des différents aspects des notions de courbure négative dans les espaces métriques, incluant le cas des groupes.

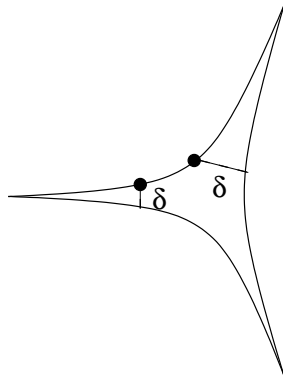
Soit X un espace métrique. Un *segment géodésique* dans X est un plongement isométrique d'un intervalle réel $[0; \ell]$ dans X . On supposera ici que l'espace X est tel que, pour toute paire de points x, y dans X avec $d(x, y) = \ell$, il existe un segment géodésique de longueur ℓ joignant x et y (pas forcément unique). C'est le cas, par exemple, d'une variété riemannienne, ou bien d'un graphe si l'on considère que chaque arête est un segment d'une longueur donnée.

Un *triangle* dans X est la donnée de trois points de X , ainsi que de trois segments géodésiques les reliant deux à deux qu'on appellera *côtés* du triangle.

DÉFINITION 6 (TRIANGLES δ -FINS).

Soit δ un nombre positif. On dit qu'un triangle est δ -fin si, pour tout point sur un côté du triangle, ce point est à distance au plus δ de l'un des deux autres côtés.

Intuitivement, cela signifie que le triangle est très aplati, et que l'espace laissé au milieu est de largeur environ δ .



DÉFINITION 7 (δ -HYPERBOLICITÉ).

Soit δ un nombre positif. On dit que l'espace métrique X est δ -hyperbolique si tout triangle de X est δ -fin.

La définition est motivée par le fait que le plan hyperbolique standard est δ -hyperbolique. Il en est de même de toute variété riemannienne simplement connexe à courbure sectionnelle majorée par $-K$, $K > 0$.

Un des intérêts de la notion de δ -hyperbolicité est sa robustesse : intuitivement, elle n'est pas affectée par des modifications de l'espace à des échelles très petites devant δ , et peut donc se concevoir comme une courbure sectionnelle négative « à grande échelle ». En particulier, un espace proche d'un espace hyperbolique, en un sens que l'on peut préciser (quasi-isométrie), est encore hyperbolique.

Étudions maintenant une classe d'espaces qui ne sont pas des variétés mais pour lesquels la notion de δ -hyperbolicité est pertinente : les groupes discrets.

2.2 Quelques notions de géométrie des groupes

Groupes hyperboliques. Considérons un groupe G engendré par un nombre fini d'éléments a_1, \dots, a_m et leurs inverses. On peut voir G comme un graphe dont les sommets sont tous les éléments de G , avec une arête entre x et y si $x = ya_i^{\pm 1}$ pour un certain a_i . Ce graphe est appelé le *graphe de Cayley* de G , et dépend bien sûr de la famille génératrice choisie. La connexité de ce graphe traduit le fait que les a_i engendrent G .

On peut faire du graphe de Cayley un espace métrique en décidant que chaque arête est de longueur 1 et que la distance entre deux sommets est la longueur du plus court chemin les joignant.

DÉFINITION 8 (GROUPES HYPERBOLIQUES).

Un groupe muni d'une famille génératrice (a_1, \dots, a_m) est hyperbolique si son graphe de Cayley est δ -hyperbolique pour un certain $\delta \geq 0$.

C'est une propriété non triviale que l'hyperbolicité ne dépend pas de la famille génératrice utilisée pour définir le graphe de Cayley. Une manière de le voir consiste à démontrer l'équivalence (non triviale) entre cette définition et l'inégalité isopérimétrique linéaire décrite ci-dessous, qui elle est facilement invariante par changement de famille génératrice.

Présentations de groupes. D'un point de vue combinatoire, le plus simple des groupes engendrés par m éléments est le *groupe libre* à m générateurs, noté F_m . Ce groupe consiste en l'ensemble des mots sur l'alphabet à $2m$ lettres $a_1, \dots, a_m, a_1^{-1}, \dots, a_m^{-1}$ avec la condition que ces mots sont *réduits* i.e. ne contiennent pas une lettre suivie immédiatement de son inverse. La multiplication de ce groupe est la concaténation des mots avec éventuelle simplification des couples $a_i^{\pm 1}a_i^{\mp 1}$ qui pourraient apparaître à la jonction ; l'élément neutre est le mot vide.

En fait tout groupe G engendré par m éléments a_1, \dots, a_m et leurs inverses peut être vu comme un quotient du groupe libre F_m : en effet étant donné un mot dans ce groupe libre, on peut former le produit des éléments de G correspondants et on obtient un élément de G ; cette application est surjective puisque les $a_i^{\pm 1}$ engendrent le groupe.

Cela correspond au fait qu'il y a toujours plus de « règles de calcul » dans G que dans le groupe libre. Ici par *règle de calcul* on entend une égalité $w_1 = w_2$ où w_1 et w_2 sont deux mots en les $a_i^{\pm 1}$. (Par exemple la règle de calcul $a_1a_2 = a_2a_1$ est satisfaite

lorsque a_1 et a_2 commutent, et si ces deux éléments engendrent le groupe, alors tout le groupe est commutatif.)

Il existe alors un moyen simple de produire un groupe satisfaisant une règle de calcul $w_1 = w_2$ donnée. Il suffit de quotienter le groupe libre F_m par le plus petit sous-groupe normal contenant l'élément $w_1 w_2^{-1}$. Dans le groupe G ainsi obtenu, noté $G = \langle a_1, \dots, a_m \mid w_1 = w_2 \rangle$, le mot $w_1 w_2^{-1}$ représente l'identité, et donc les mots w_1 et w_2 représentent le même élément.

Plus généralement, donnons-nous un ensemble (fini ou infini) R de mots du groupe libre F_m . Le groupe noté $\langle a_1, \dots, a_m \mid \{r = e\}_{r \in R} \rangle$, ou plus simplement $\langle a_1, \dots, a_m \mid R \rangle$, est le groupe $G = F_m / \langle R \rangle$ où $\langle R \rangle$ est le plus petit sous-groupe normal de F_m contenant R . Les éléments de R seront appelés *relateurs*. Tout groupe de type fini admet une telle présentation.

Inégalité isopérimétrique linéaire et diagrammes de van Kampen. Lorsqu'un groupe G est présenté par $G = \langle a_1, \dots, a_m \mid R \rangle$, tout mot w en les générateurs représentant l'élément neutre de $G = F_m / \langle R \rangle$ est par construction un élément de $\langle R \rangle$. En conséquence il s'écrit comme un produit de conjugués d'éléments de R ou de leurs inverses :

$$w = e \text{ dans } G \Leftrightarrow w = \prod u_i r_i^{\pm 1} u_i^{-1}, \quad r_i \in R$$

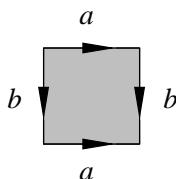
l'égalité ayant lieu en tant que mots dans le groupe libre.

Une question naturelle qui se pose alors est : en présence d'un mot dont on sait qu'il représente l'élément neutre, combien de relateurs r_i comporte, au minimum, une telle décomposition ? Un des premiers résultats de la théorie des groupes hyperboliques est le suivant (on renvoie à [BH99] pour une preuve).

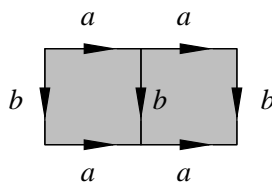
PROPOSITION 9.

Un groupe $G = \langle a_1, \dots, a_m \mid R \rangle$ est hyperbolique si et seulement s'il existe une constante C telle que pour tout mot w de longueur L représentant l'élément neutre de G , w peut s'écrire comme un produit d'au plus $C.L$ conjugués de relateurs.

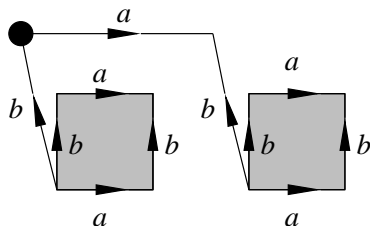
Il existe une interprétation géométrique de ces produits de conjugués de relateurs. Étant donné une présentation de groupe $G = \langle a_1, \dots, a_m \mid R \rangle$, pour chaque relateur $r \in R$ (supposé réduit), de longueur L_r , on définit un *relateur géométrique* comme un disque bordé par L_r arêtes, chaque arête portant un générateur a_i comme suit : la k -ième arête porte le générateur correspondant à la k -ième lettre de r (on met une orientation inverse sur l'arête si la k -ième lettre de r est a_i^{-1}). Voici par exemple le relateur géométrique associé au relateur $aba^{-1}b^{-1}$.



On peut former des « puzzles » avec ces relateurs géométriques, où l'on s'autorise à recoller deux relateurs géométriques le long d'arêtes identiques (on peut aussi utiliser les relateurs inverses). Cela définit un *diagramme de van Kampen*. Van Kampen a prouvé qu'un mot (réduit) représente l'élément neutre dans G si et seulement si ce mot peut être lu sur le bord d'un diagramme de van Kampen. Voici par exemple une preuve que si a et b commutent, alors a^2 et b commutent.



Les diagrammes de van Kampen sont liés aux produits de conjugués de relateurs de la manière suivante : choisir un point-base dans le diagramme, suivre un chemin jusqu'à un premier relateur, faire le tour du relateur, revenir au point-base, suivre un chemin jusqu'à un deuxième relateur, en faire le tour, revenir au point-base, etc. On décrit alors un mot de la forme $\prod u_i r_i^{\pm 1} u_i^{-1}$, les u_i correspondant aux trajets entre le point-base et les relateurs. Par exemple, en refermant le diagramme ci-dessous on retrouve celui donné ci-dessus.



Dans les groupes hyperboliques, on sait donc qu'étant donné un mot w représentant l'élément neutre, on peut trouver un diagramme de van Kampen ayant ce mot comme bord, et dont le nombre de faces croît au plus linéairement en la taille de w . Intuitivement, un tel diagramme a donc une aire proportionnelle à son périmètre, comme un disque dans le plan hyperbolique, d'où l'appellation *inégalité isopérimétrique linéaire*.

L'inégalité isopérimétrique linéaire et les diagrammes de van Kampen seront nos principaux outils dans l'étude des groupes aléatoires.

2.3 Le monde des groupes aléatoires

L'une des raisons avancées par Gromov [Gro87] pour s'intéresser aux groupes hyperboliques est que « la plupart » des groupes le sont. La formalisation de cette affirmation est l'objet de l'étude des groupes aléatoires. Mon texte de survol *A January 2005 invitation to random groups*, reproduit dans ce mémoire, contient une introduction au sujet, aussi cette présentation sera-t-elle brève. On pourra aussi consulter [Ghy03].

Puisqu'on sait que tout groupe admet une présentation $G = \langle (a_i)_{i \in I} \mid R \rangle$, on peut choisir un groupe au hasard en tirant au hasard une telle présentation. On peut alors se demander si telle ou telle propriété du groupe est très probable ou non.

La manière dont on tire la présentation au hasard constitue un *modèle* de groupe aléatoire. La plupart des modèles qui ont été étudiés jusqu'ici utilisent un nombre fini, fixé, de générateurs a_1, \dots, a_m et spécifient ensuite comment tirer un ensemble aléatoire R de mots en ces générateurs. Un modèle particulièrement intéressant est le *modèle à densité* [Gro93], dans lequel un paramètre $d \in [0; 1]$ permet de contrôler la quantité de relateurs que l'on place dans R , ce qui permet d'étudier précisément l'influence du nombre de relateurs sur les caractéristiques du groupe. Plus précisément, le modèle à densité dépend de deux paramètres, la densité $d \in [0; 1]$ ainsi qu'un entier ℓ qui contrôle la longueur des relateurs. Ce dernier paramètre ℓ est supposé grand, ce qui permet d'obtenir des propriétés dont la probabilité tend vers 1 quand $\ell \rightarrow \infty$.

Notons qu'on peut toujours supposer qu'une présentation de groupe ne contient que des relateurs réduits, puisque toute paire $a_i^{\pm 1} a_i^{\mp 1}$ apparaissant dans un relateur peut être supprimée sans changer le groupe. Maintenant, le nombre N_ℓ de mots réduits d'une certaine longueur ℓ sur l'alphabet $a_1^{\pm 1}, \dots, a_m^{\pm 1}$ est $N_\ell = (2m)(2m - 1)^{\ell-1}$. Le modèle à densité consiste à prendre un nombre de relateurs égal à une certaine puissance $d \in [0; 1]$ de ce nombre total de relateurs possibles.

MODÈLE À DENSITÉ.

Choisir un nombre d entre 0 et 1. Se donner une longueur de mots ℓ très grande. Tirer un ensemble de relateurs R en tirant $(N_\ell)^d$ fois de suite (indépendamment, avec ou sans remise) un mot réduit au hasard uniformément parmi les N_ℓ mots réduits de longueur ℓ possibles. Un groupe aléatoire à densité d est le groupe $G = \langle a_1, \dots, a_m \mid R \rangle = F_m / \langle R \rangle$ ainsi obtenu.

L'intérêt de cette manière de fixer la taille de R est démontré par le théorème suivant, dû à Gromov [Gro93].

THÉORÈME 10 (TRANSITION DE PHASE POUR LES GROUPES ALÉATOIRES).

Soit G un groupe aléatoire à densité d . Si $d < 1/2$, la probabilité que G soit infini et hyperbolique tend vers 1 lorsque $\ell \rightarrow \infty$. Si $d > 1/2$, le groupe G est soit $\{e\}$ soit $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, avec probabilité tendant vers 1 quand $\ell \rightarrow \infty$.

On trouvera une démonstration de ce résultat à la fin de *A January 2005 Invitation to Random Groups*, mais esquissons tout de même une preuve de la partie $d > 1/2$ du théorème. L'idée, qui fait bien ressortir le pourquoi de la densité, repose sur le *principe des tiroirs probabiliste* : si l'on place au hasard beaucoup plus que \sqrt{N} objets dans N tiroirs, alors très probablement deux objets sont placés le même tiroir. Par exemple, dans une classe de $20 = \lceil \sqrt{365} \rceil$ élèves, il y a déjà plus de 40% de chances que deux d'entre eux aient la même date de naissance.

En densité $d > 1/2$, on a donc très probablement tiré deux fois le même mot dans l'ensemble de relateurs R . Cela n'est pas très intéressant mais, a fortiori, on a aussi très probablement tiré dans R deux mots qui ne diffèrent que par la première lettre. Supposons par exemple que $r_1 = a_1 w$ et $r_2 = a_2 w$ ont été placés dans R , où w est

un mot de longueur $\ell - 1$. Par définition du groupe aléatoire G , r_1 et r_2 représentent tous les deux l'élément neutre de G . Mais cela implique immédiatement que $a_1 = a_2$ dans G . En fait, quand $\ell \rightarrow \infty$, très probablement chaque générateur a_i devient égal à tous les autres ainsi qu'à leurs inverses, et le groupe G ne peut alors être que $\{e\}$ ou $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (ce dernier cas correspondant à ℓ pair).

En densité plus petite que $1/2$, l'argument consiste à construire des diagrammes de van Kampen et à démontrer qu'ils satisfont une inégalité isopérimétrique linéaire. L'idée est que, lorsqu'on fabrique un diagramme de van Kampen en recollant des relateurs aléatoires, chaque recollement « coûte » un facteur $1/(2m-1)$ en probabilité. Ceci permet de borner la quantité de recollements possibles lorsqu'on fabrique les diagrammes de van Kampen, et de prouver qu'une certaine longueur reste forcément sur le bord du diagramme, qui satisfait donc une inégalité isopérimétrique.

Intéressons-nous à des généralisations du Théorème 10. Ce dernier affirme qu'un groupe aléatoire, autrement dit un quotient aléatoire d'un groupe libre, est hyperbolique. On peut se demander si un quotient aléatoire d'un groupe hyperbolique reste hyperbolique, autrement dit, si l'hyperbolicité est stable en plus d'être générique.

Les deux résultats ci-dessous constituent les théorèmes principaux du long article *Sharp phase transition theorems for hyperbolicity of random groups*. On rappelle qu'un groupe est *sans torsion* s'il n'existe pas d'élément x (à part e) et d'entier $n > 1$ avec $x^n = e$. Un groupe hyperbolique sans torsion est en outre dit *non élémentaire* s'il n'est ni $\{e\}$ ni \mathbb{Z} .

THÉORÈME 11.

Soit G_0 un groupe hyperbolique sans torsion et non élémentaire. Fixons une famille génératrice finie de G_0 , et soit B_ℓ l'ensemble des éléments de G_0 de taille au plus ℓ par rapport à cette famille génératrice.

Soit $0 \leq d \leq 1$. Soit $R \subset G_0$ un ensemble obtenu en tirant au hasard $(\#B_\ell)^d$ fois de suite un élément de B_ℓ (uniformément, avec ou sans remise). Soit $G = G_0/\langle R \rangle$ le quotient aléatoire obtenu.

- Si $d < 1/2$, la probabilité que G soit hyperbolique non élémentaire tend vers 1 quand $\ell \rightarrow \infty$.
- Si $d > 1/2$, alors $G = \{e\}$ avec probabilité tendant vers 1 quand $\ell \rightarrow \infty$.

Autrement dit, dans un groupe hyperbolique on peut « tuer » beaucoup d'éléments choisis au hasard. Bien sûr, quand G_0 est un groupe libre on retrouve le théorème précédent (au remplacement près, indolore, de la boule par la sphère).

Étant donné une famille génératrice dans un groupe hyperbolique, il peut être plus commode de tirer des mots aléatoires en les générateurs plutôt qu'un élément dans la boule B_ℓ , la mesure uniforme sur B_ℓ étant plus difficile à simuler. C'est l'objet du théorème suivant.

THÉORÈME 12.

Soit G_0 un groupe hyperbolique sans torsion et non élémentaire, engendré par des éléments a_1, \dots, a_m .

Soit $0 \leq d \leq 1$. Soit W_ℓ l'ensemble des $(2m)^\ell$ mots de longueur ℓ sur l'alphabet $a_1^{\pm 1}, \dots, a_m^{\pm 1}$. Soit R un ensemble obtenu en tirant $(2m)^{d\ell}$ fois de suite un élément de W_ℓ (uniformément, avec ou sans remise). Soit $G = G_0 / \langle R \rangle$ le quotient aléatoire obtenu.

Alors il existe un $d_{G_0} \in]0; 1[$ tel que

- Si $d < d_{G_0}$, la probabilité que G soit hyperbolique non élémentaire tend vers 1 quand $\ell \rightarrow \infty$.
- Si $d > d_{G_0}$, alors $G = \{e\}$ ou $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ avec probabilité tendant vers 1 quand $\ell \rightarrow \infty$.

De plus, d_{G_0} peut être explicitement décrit comme l'exposant de retour en 0 de la marche aléatoire dans G_0 :

$$d_{G_0} = - \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ t \text{ pair}}} \frac{1}{t} \log_{2m} \Pr(w_t =_{G_0} e)$$

où w_t est un mot aléatoire de longueur t en les $a_i^{\pm 1}$.

Décrivons très rapidement les autres propriétés des groupes aléatoires que j'ai pu obtenir. Comme la densité critique dépend de l'exposant de retour en 0 de la marche aléatoire dans le groupe de départ, il est naturel de se demander comment cette quantité est affectée par le fait de prendre un quotient aléatoire. J'ai montré dans *Cogrowth and spectral gap of generic groups* qu'en fait cette quantité n'est presque pas modifiée. Dans le cas du groupe libre, on peut interpréter ce résultat comme suit, en voyant les relations d'un groupe comme des « ponts » reliant l'élément neutre à certains éléments du groupe libre : si l'on fait une marche aléatoire dans un arbre, mais en ajoutant au hasard un grand nombre de ponts de longueur nulle entre l'origine et des sommets lointains choisis au hasard (ceci de manière covariante), soit tous les points sont reliés à l'origine par une succession de ponts (ceci correspond à une densité supérieure à 1/2), soit la marche aléatoire ne voit essentiellement aucune différence.

J'ai montré dans *Growth exponent of generic groups* que l'exposant de croissance (taux de croissance exponentiel asymptotique du nombre de points dans une grande boule) d'un groupe aléatoire est en fait très proche de celui d'un groupe libre. Ceci répondait en partie à une question de Grigorchuk et de la Harpe [GrH97]. Un résultat intermédiaire notable est que l'exposant de croissance d'un groupe hyperbolique (non aléatoire) est algorithmiquement calculable.

Dans la note *Collapsing of random quotients of hyperbolic groups with torsion* j'ai montré que la présence d'éléments de torsion peut modifier la valeur de la densité critique des quotients aléatoires d'un groupe donné.

Je me suis aussi intéressé aux propriétés combinatoires des groupes aléatoires. Dans l'article *Some small cancellation properties of random groups* je montre, entre autres, qu'en densité inférieure à 1/5 est satisfaite une propriété classique (l'algorithme de Dehn) utilisée pour résoudre le problème du mot. Un des outils est une version très fine du théorème de Cartan–Hadamard–Gromov pour les groupes hyperboliques, qui affirme qu'on peut vérifier l'inégalité isopérimétrique linéaire dans un groupe en connaissant seulement une partie finie du groupe ; j'ai raffiné ce résultat pour rendre

la perte dans les constantes arbitrairement faible (au lieu d'un facteur 10^{10}), ce qui était indispensable pour mes applications.

Dans *On a small cancellation theorem of Gromov*, je donne une preuve détaillée d'une affirmation de Gromov, la « petite simplification à graphe » [Gro03], qui permet de produire des groupes dont le graphe de Cayley contient (presque injectivement) un graphe fini prescrit.

J'ai aussi entamé en 2004 une collaboration avec D. Wise (McGill University, Toronto) qui a produit deux articles. Nous avons développé de nouvelles techniques de construction de groupes ayant la propriété (T) , qui sont relativement souples et permettent d'imposer d'autres conditions à volonté; cela a permis de construire dans l'article *Kazhdan groups with infinite outer automorphism group* de nouveaux groupes répondant à des questions anciennes. Nous avons aussi étudié, dans le preprint *Cubulating groups at density 1/6*, certaines propriétés géométriques des groupes aléatoires, et en particulier nous avons montré un théorème de géométrisation pour les groupes aléatoires en densité $< 1/6$: ces groupes agissent essentiellement sur des complexes cubiques à courbure négative, et possèdent la propriété de Haagerup. Ces méthodes permettent aussi d'exclure la propriété (T) en densité $< 1/5$ (elle est connue en densité $> 1/3$).

Le texte *A January 2005 Invitation to Random Groups* tente de faire le point sur l'ensemble des propriétés connues des groupes aléatoires et donne un certain nombre de questions ouvertes sur le sujet.

3 Courbures discrètes II : courbure de Ricci positive

3.1 Courbure de Ricci discrète

Du point de vue de la physique statistique, il n'y a pas grande différence entre un système de n particules dont l'énergie totale est exactement E , et un système de n particules indépendantes ayant chacune une énergie moyenne E/n , du moins lorsque n est grand. Pour des particules libres où E est la somme des carrés des vitesses, dans le premier cas l'espace de configuration est une sphère dans l'espace des vitesses, tandis que dans le second cas, c'est tout l'espace des vitesses, mais muni d'une mesure gaussienne (la distribution de Maxwell–Boltzmann $\exp(-E/kT)$ associée à cette énergie E). En particulier, si on tire beaucoup de points au hasard suivant cette gaussienne, ils vont dessiner un ensemble proche d'une sphère. Un troisième modèle, discret celui-là, consisterait à donner à chaque particule une énergie 0 ou $2E/n$ en tirant à pile ou face, auquel cas l'espace de configuration serait le cube $\{0, 2E/n\}^n$.

On peut donc se demander si ces espaces ont quelque chose de commun du point de vue géométrique. Par exemple, une sphère étant l'archétype d'un espace de courbure positive, on peut se demander si l'espace euclidien, muni d'une mesure gaussienne, peut être qualifié d'espace à courbure positive.

Une théorie allant dans ce sens a été développée avec succès par Bakry et Émery [BE84, BE85]. Elle permet d'attribuer une courbure de Ricci à une variété munie d'une mesure (plus exactement à un espace muni d'un *processus de diffusion*, dont la mesure considérée est la distribution invariante), de sorte que l'espace gaussien acquière une courbure de Ricci positive. Néanmoins, l'utilisation des diffusions rend très délicate son application à des espaces discrets, comme notre troisième exemple, et, en ce sens, elle n'est pas robuste par passage à un espace « proche ». Les extensions de la théorie de Bakry–Émery proposées depuis (par exemple celle développée indépendamment dans [Stu06, LV, Oht07], voir aussi [RS05, OV00]) souffrent du même problème.

Il apparaît ainsi nécessaire de développer une notion robuste de courbure de Ricci « à une certaine échelle ». Cette notion devrait être compatible avec celle de Bakry–Émery, facile à appliquer sur des espaces discrets, permettre de généraliser des théorèmes connus en courbure de Ricci positive, et capturer de manière robuste les propriétés communes que la physique statistique observe pour la sphère ou l'espace gaussien. Ce dernier point nous amènera à parler de *concentration de la mesure*, application sur laquelle nous insisterons.

La notion proposée transpose directement la définition 2 ou plutôt son corollaire 3. Il s'agit de comparer la distance entre des petites boules à la distance entre leurs centres. La courbure de Ricci sera positive si *les boules sont plus proches que leurs centres*. Par analogie avec la définition 2 qui fait intervenir une mesure (on prend une moyenne sur une sphère tangente), il sera commode de voir une boule comme une mesure de masse 1 autour d'un point. Pour définir une distance entre boules, on peut alors simplement utiliser la *distance de transport* (ou de Wasserstein, ou Monge–Kantorovich–Rubinstein) entre mesures, notion bien connue [Vil03] définie comme suit.

DÉFINITION 13 (DISTANCE DE TRANSPORT).

Soient μ_1, μ_2 deux mesures de masse unité dans un espace métrique (X, d) . Un plan de transfert de μ_1 vers μ_2 (aussi appelé couplage) est une mesure ξ sur $X \times X$ telle que $\int_y d\xi(x, y) = d\mu_1(x)$ et $\int_x d\xi(x, y) = d\mu_2(y)$. (Ainsi $d\xi(x, y)$ représente la quantité de masse déplacée de x en y .)

La distance de transport L^1 entre μ_1 et μ_2 , notée W_1 , est la meilleure distance moyenne réalisable :

$$W_1(\mu_1, \mu_2) := \inf_{\xi \in \Pi(\mu_1, \mu_2)} \iint d(x, y) d\xi(x, y)$$

où $\Pi(\mu_1, \mu_2)$ est l'ensemble des plans de transfert de μ_1 vers μ_2 .

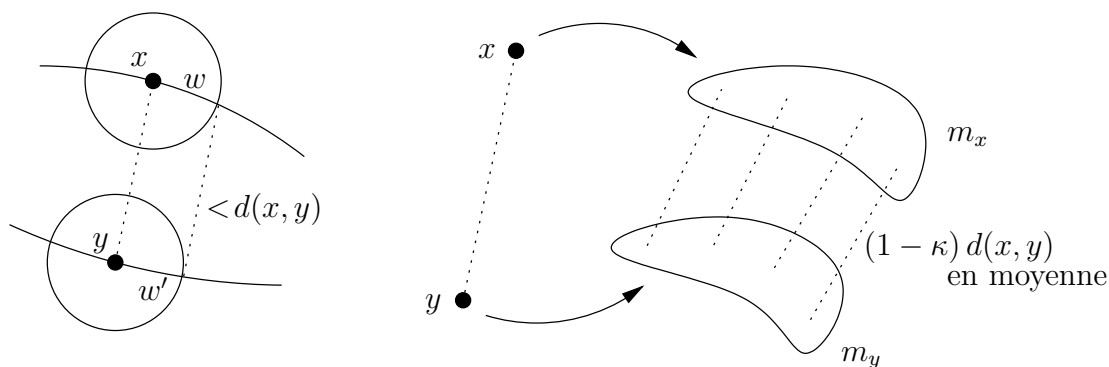
En général W_1 peut être infini et est donc une semi-distance. L'inégalité triangulaire utilise le dit *lemme de recollement* pour les couplages, ce qui techniquement nécessite d'imposer que l'espace métrique X soit polonais (séparable, complet). W_1 est une véritable distance si on se restreint à l'ensemble des mesures μ ayant un *premier moment fini*, c'est-à-dire telles que $\int d(o, x) d\mu < \infty$ pour une certaine origine $o \in X$ que l'on peut choisir arbitrairement.

On va maintenant utiliser la distance de transport entre des petites boules pour définir une courbure de Ricci. La notion pertinente de « petite boule » dépend de la situation. Par exemple, dans un graphe il est naturel de prendre des boules de rayon 1, tandis que sur une variété on prendra des boules arbitrairement petites. Cela permet de définir une notion de courbure de Ricci « à une certaine échelle » selon la taille des boules utilisées. Nous supposerons ainsi que, pour chaque point dans un espace X , on a choisi une mesure m_x sur X , de masse 1, qui jouera le rôle d'une petite boule autour de x . (La définition 15 permet de choisir un tel système de boules de manière souvent pertinente.)

DÉFINITION 14 (COURBURE DE RICCI DISCRÈTE).

Soit (X, d) un espace métrique. On suppose que pour chaque $x \in X$, est donnée une mesure de probabilité m_x sur X . Soient x et y deux points distincts de X . La courbure de Ricci discrète le long de xy est la quantité $\kappa(x, y)$ définie par la relation

$$W_1(m_x, m_y) = (1 - \kappa(x, y)) d(x, y)$$



Dans une variété riemannienne, la notion de courbure de Ricci était définie le long d'un vecteur tangent. Ici dans un espace métrique, le mieux que l'on puisse faire pour remplacer un vecteur tangent est d'utiliser une paire de points. On verra plus loin (proposition 19) qu'il suffit de calculer $\kappa(x, y)$ pour des paires de points suffisamment proches.

Les hypothèses techniques nécessaires au bon fonctionnement de cette définition sont les suivantes : (X, d) doit être un espace polonais, et chaque m_x doit avoir un premier moment fini (voir ci-dessus).

Remarquons que la donnée des $(m_x)_{x \in X}$ définit exactement le noyau de transition d'une chaîne de Markov. Notre définition peut être considérée comme une version métrique des coefficients ergodiques habituels (définis en utilisant la distance de variation totale des mesures). En fait, Dobrushin [Dob70] utilisait une notion très similaire pour étudier des systèmes de spins, et notre définition peut être considérée comme la convergence de travaux de Dobrushin et ses successeurs [Dob70, DS85, Dob96, BD97] sur les chaînes de Markov d'une part, et du courant plus géométrique ou analytique initié par Bakry et Émery.

Pour des travaux utilisant des idées proches, voir par exemple [RS05, Jou07, Oli, DGW04].

Exemples. Passons en revue des exemples d'application de cette définition, en commençant bien sûr par les variétés riemanniennes. Pour cela, il faut dans chaque cas choisir la famille de mesures $(m_x)_{x \in X}$ de manière appropriée. La manière la plus simple est la suivante.

DÉFINITION 15 (MARCHE ALÉATOIRE DE PAS ε).

Soit (X, d, μ) un espace métrique mesuré; on suppose que les boules dans X sont de mesure finie et que $\text{Supp } \mu = X$. Fixons $\varepsilon > 0$. La marche aléatoire de pas ε sur X consiste, étant donné un point de départ x , à faire un saut aléatoire dans la boule de rayon ε autour de x avec probabilité proportionnelle à μ . Autrement dit, on pose $m_x = \mu|_{B(x, \varepsilon)} / \mu(B(x, \varepsilon))$.

En considérant la marche aléatoire de pas ε très petit dans une variété riemannienne, on retrouve, à normalisation près, la courbure de Ricci ordinaire. La proposition suivante est une variante du corollaire 3 dont notre définition était inspirée.

EXEMPLE 16 (VARIÉTÉS RIEMANNIENNES).

Soit (X, d) une variété riemannienne lisse. Considérons la marche aléatoire de pas ε , pour ε assez petit. Soient $x, y \in X$ deux points assez proches. et soit v le vecteur tangent unitaire en x pointant vers y . Alors

$$\kappa(x, y) = \frac{\varepsilon^2 \text{Ric}(v, v)}{2(N + 2)} + O(\varepsilon^3 + \varepsilon^2 d(x, y))$$

La normalisation en ε^2 traduit le fait que la différence entre une variété et l'espace euclidien est du second ordre.

Voici un exemple qui n'est pas une variété, mais qui est proche d'un espace euclidien et dont on attend donc que la courbure soit nulle.

EXEMPLE 17 (\mathbb{Z}^N ET \mathbb{R}^N).

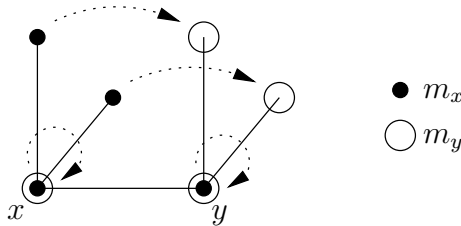
Soit m la marche aléatoire de pas 1 sur la grille \mathbb{Z}^N munie de sa métrique de graphe. Alors pour tous points $x, y \in \mathbb{Z}^N$, la courbure de Ricci discrète le long de xy est nulle.

Cette exemple se généralise à toute métrique et à toute marche aléatoire sur \mathbb{Z}^N ou \mathbb{R}^N qui soient invariantes par translation. Par exemple, le réseau triangulaire standard dans le plan est de courbure de Ricci discrète nulle.

L'exemple discret le plus intéressant est sans doute le cube. Comme nous l'avons déjà mentionné, la géométrie du cube en tant qu'espace métrique mesuré est assez semblable à celle de la sphère. Nous invitons le lecteur à refaire en détail l'exemple suivant, qui montre comment notre définition peut être calculée en pratique sur un espace discret.

EXEMPLE 18 (CUBE DISCRET).

Soit le cube discret $\{0, 1\}^N$, muni de sa métrique L^1 et de la mesure de probabilité uniforme. Considérons la marche aléatoire de pas 1. Alors la courbure de Ricci discrète d'une paire de points voisins x, y est $\kappa(x, y) = \frac{2}{N+1}$.



Le lecteur aura noté que l'estimation de $\kappa(x, y)$ dans cet exemple ne concerne que les paires de points voisins, et que de même, pour les variétés riemanniennes, nous avons supposé $d(x, y)$ très petit. En géométrie riemannienne, la courbure est une quantité locale, dont le contrôle permet ensuite d'obtenir des informations globales. La proposition suivante montre que, dans un espace *géodésique*, il en est de même de la courbure de Ricci discrète.

PROPOSITION 19 (ESPACES GÉODÉSQUES).

Soit (X, d) un espace métrique α -géodésique, c'est-à-dire que pour tout couple de points $(x, y) \in X \times X$, il existe un entier n et une suite de points $x_0 = x, x_1, \dots, x_n = y$ avec $d(x, y) = \sum d(x_i, x_{i+1})$ et $d(x_i, x_{i+1}) \leq \alpha$.

Alors, l'inégalité $\kappa(x, y) \geq \kappa$ pour tout couple de points (x, y) avec $d(x, y) \leq \alpha$, implique la même inégalité pour tout couple de points $(x, y) \in X \times X$.

Par exemple, un graphe est 1-géodésique et une variété riemannienne est α -géodésique pour tout α ; dans les deux cas, cela résulte de la construction même de la distance. Cette proposition est très simple à démontrer mais extrêmement utile dans les applications.

L'exemple suivant relie notre définition de la courbure de Ricci discrète à la notion de δ -hyperbolicité mentionnée dans la partie précédente. Bien que la courbure de Ricci négative ne soit pas très utile en pratique, il est agréable que les définitions soient compatibles.

EXEMPLE 20 (GROUPES HYPERBOLIQUES).

Soit X le graphe de Cayley d'un groupe hyperbolique non élémentaire par rapport à une certaine famille génératrice. Soit k un entier assez grand et considérons la marche aléatoire sur X dont un pas consiste à faire k pas de la marche aléatoire simple par rapport à cette famille génératrice. Soient $x, y \in X$. Alors $\kappa(x, y) = -\frac{2k}{d(x, y)}(1 - o(1))$ lorsque k et $d(x, y)$ tendent vers l'infini.

Remarquons que $-2k/d(x, y)$ est la plus petite valeur possible de κ pour une marche aléatoire dont les pas sont de taille au plus k .

Un point du cahier des charges pour la courbure de Ricci discrète était d'être compatible avec la théorie de Bakry–Émery. Rappelons que l'exemple le plus simple de cette dernière est le processus d'Ornstein–Uhlenbeck sur \mathbb{R} ou \mathbb{R}^N , qui est le processus le plus naturel dont la gaussienne soit la mesure invariante. C'est un brownien modifié par une force de rappel linéaire vers l'origine, i.e. la solution de l'équation différentielle stochastique $dX_t = \sqrt{2} dB_t - X_t dt$ associée à l'opérateur de diffusion $Lf = \Delta f - x \cdot \nabla f$. Plus généralement :

EXEMPLE 21 (COURBURE DE RICCI D'APRÈS BAKRY ET ÉMERY).

Soit X une variété riemannienne de dimension N et soit F un champ de vecteurs tangents sur X . Considérons l'opérateur différentiel

$$L := \Delta + F \cdot \nabla$$

naturellement associé à l'équation différentielle stochastique

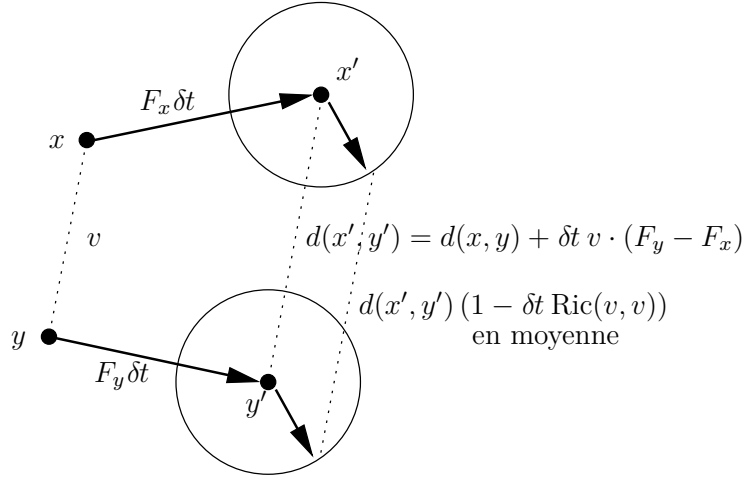
$$dX_t = \sqrt{2} dB_t + F dt$$

où B_t est le mouvement brownien standard sur la variété riemannienne X . La courbure de Ricci de cet opérateur au sens de Bakry–Émery, appliquée à un vecteur v , est $\text{Ric}(v, v) - v \cdot \nabla_v F$.

Considérons le schéma d'Euler suivant pour l'approximation au temps δt de ce processus. Partant d'un point x , on définit la mesure m_x en suivant le flot du champ F pendant un temps δt , puis en sautant aléatoirement dans une boule de rayon $\sqrt{2(N+2)\delta t}$ autour du point obtenu.

Soient $x, y \in X$ avec $d(x, y)$ assez petit, et soit v le vecteur tangent unitaire en x pointant vers y . Alors

$$\kappa(x, y) = \delta t \left(\text{Ric}(v, v) - v \cdot \nabla_v F + O(d(x, y)) + O(\sqrt{\delta t}) \right)$$



Expliquons les normalisations. Sauter dans une boule de rayon ε engendre une variance $\varepsilon^2 \frac{1}{N+2}$ dans une direction donnée, tandis que le brownien standard a par définition une variance dt par unité de temps dans une direction donnée. En conséquence, la discrétisation correcte au temps δt exige de sauter dans une boule de rayon $\varepsilon = \sqrt{2(N+2)\delta t}$. Par ailleurs, le générateur infinitésimal du mouvement brownien est $\frac{1}{2}\Delta$ (laplacien des probabilistes) et non Δ , ce qui explique le facteur $\sqrt{2}$ supplémentaire.

L'origine du terme $-v \cdot \nabla_v F$ pour la courbure de Ricci au sens de Bakry–Émery apparaît clairement avec notre définition : cette quantité exprime la variation de la distance de deux points proches sous le flot de F . (En particulier, la partie antisymétrique de ∇F engendre une isométrie infinitésimale.)

Autres exemples. La courbure de Ricci discrète est facilement calculable et positive dans de nombreux autres exemples, comme les distributions binomiales ou multinomiales ou encore la mesure de Poisson (dans une limite convenable).

Mentionnons en particulier l'exemple du modèle d'Ising : la courbure de Ricci discrète est positive si et seulement si le critère de Dobrushin classique est satisfait, et les théorèmes généraux sur la courbure de Ricci discrète (concentration, inégalité de Sobolev logarithmique), appliqués à ce cas particulier, semblent être comparables

à ceux de la littérature sur le sujet. L'article [Dob70] où ce critère est introduit est justement celui qui a renouvelé l'intérêt des mathématiciens pour les distances de transport et leur a donné le nom de *distances de Vasershtein*, qu'elles ont conservé à la transcription près.

3.2 Concentration de la mesure et courbure de Ricci

Quelques espaces concentrés. Passons maintenant aux théorèmes que l'on peut démontrer en utilisant la courbure de Ricci discrète. Plutôt que de les énoncer tous, nous nous attarderons sur l'un d'entre eux, un théorème de *concentration de la mesure*. Sur ce sujet, on pourra consulter l'introduction [Sch01], les ouvrages de référence [Led01, Mas07], ou encore le chapitre 3 $\frac{1}{2}$ de [Gro99] pour un point de vue très géométrique.

Revenons aux trois espaces mentionnés dans l'introduction à propos de N particules en physique statistique : la sphère, l'espace gaussien, et le cube discret.

Commençons par ce dernier. Soit $X = \{P, F\}^N$ l'espace des résultats de N tirages à pile ou face. Considérons la fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ égale à la proportion de « pile ». Un des résultats les plus fondamentaux des probabilités est que, pour N grand, la fonction f est presque toujours proche de $1/2$; en outre, les écarts à $1/2$ sont d'ordre $1/\sqrt{N}$ et à peu près gaussiens. On peut formaliser cette dernière affirmation en évaluant la mesure des points où l'écart est plus grand que t :

$$\mu\left(\left\{x \in X, \left|f(x) - \frac{1}{2}\right| \geq t\right\}\right) \leq 2 \exp -\frac{t^2}{2D^2}$$

où μ est la mesure de probabilité uniforme sur X et où $D = 1/\sqrt{N}$ représente l'écart-type.

En fait, et c'est l'intérêt des résultats de concentration, cette propriété est loin de se limiter à une seule fonction f . Plus exactement, le même résultat est vrai pour toute fonction f telle que, si l'on change un « pile » en « face » ou inversement, la valeur de f n'est modifiée que d'au plus $1/N$.

Reformulons cette dernière propriété en munissant notre espace X de la métrique suivante : la distance entre deux points $x = (x_1, \dots, x_N)$ et $x' = (x'_1, \dots, x'_N)$ de X est $1/N$ fois le nombre de différences entre x et x' . Ainsi, une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est 1-lipschitzienne si et seulement si elle varie d'au plus $1/N$ quand on change un « pile » en « face » ou inversement. Nous renvoyons à [Led01] pour une démonstration du résultat suivant, désormais folklorique.

THÉORÈME 22.

Soit f une fonction 1-lipschitzienne de X dans \mathbb{R} . Alors

$$\mu\left(\left\{x \in X, |f(x) - \mathbb{E}_\mu f| \geq t\right\}\right) \leq 2 \exp -\frac{t^2}{2D^2}$$

où $D = 1/\sqrt{N}$ et où $\mathbb{E}_\mu f$ est la moyenne de f .

Ce théorème illustre l'idée que lorsqu'on a un espace de dimension N et de taille 1 (ici le diamètre du cube est 1), si chaque variable influe d'au plus $1/N$ alors les

fluctuations du résultat sont d'ordre $1/\sqrt{N}$. La généralité de ce principe apparaît dans le(s) théorème(s) suivant(s) :

THÉORÈME 23.

Le théorème 22 est valable pour les espaces métriques mesurés (X, d, μ) suivants, outre le cube :

- la sphère S^N de dimension N et de rayon 1, avec pour μ la mesure de volume normalisée (Lévy [Lév22]) ;
- l'espace \mathbb{R}^N muni de la mesure gaussienne $\mu(dx) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \exp(-|x|^2/2\sigma^2)$ où l'écart-type σ est pris de telle sorte que $\mathbb{E}_\mu |x|^2 = 1$;
- toute variété riemannienne de dimension N dont la courbure de Ricci est au moins égale à celle de la sphère S^N , avec pour μ la mesure riemannienne normalisée (Gromov–Lévy [Gro86]).

(La valeur optimale de l'écart-type D peut varier d'un petit facteur numérique selon les cas, mais est toujours du même ordre $\approx 1/\sqrt{N}$.)

Un théorème de concentration. Mais les différentes instances de ce théorème utilisaient pour leur démonstration des ingrédients variés (méthode de martingales, isopérimétrie sur la sphère ou l'espace gaussien, compréhension du rôle de la courbure de Ricci sur les variations de volume). Un de nos objectifs est de les faire apparaître comme des cas particuliers d'un même théorème utilisant la courbure de Ricci discrète.

Pour énoncer un tel théorème, nous aurons besoin d'introduire quelques quantités. Revenons à notre espace métrique (X, d) muni d'une famille de mesures $(m_x)_{x \in X}$, vue comme une marche aléatoire. La *constante de diffusion discrète* $\sigma(x)$ au point x est définie comme la distance quadratique moyenne entre deux points sous m_x :

$$\sigma(x) := \left(\frac{1}{2} \iint d(y, z)^2 m_x(dy) m_x(dz) \right)^{1/2}$$

et la *dimension locale* en x est définie par

$$n_x := \frac{\iint d(y, z)^2 m_x(dy) m_x(dz)}{\sup \{ \iint d(f(y), f(z))^2 m_x(dy) m_x(dz), f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ 1-lipschitzienne} \}}$$

Par exemple, quand on prend pour m_x la marche aléatoire de pas ε dans une variété riemannienne de dimension N , on obtient que $\sigma(x)$ vaut environ ε et n_x vaut environ N (à des petites constantes numériques près). Définissons également

$$\sigma_\infty = \sup_{x \in X} \text{diam Supp } m_x$$

qui représente la *granularité* de notre marche aléatoire.

Nous pouvons maintenant énoncer un théorème affirmant que si un espace est à courbure de Ricci discrète positive, alors cet espace est concentré, regroupant tous les exemples précédents. Toutefois, il est facile de construire des exemples d'espaces de

courbure positive où la concentration de la mesure est exponentielle et non gaussienne. Le théorème suivant permet de séparer un régime gaussien et un régime exponentiel.

THÉORÈME 24 (CONCENTRATION DE LA MESURE EN COURBURE POSITIVE).

Soit (X, d) un espace métrique muni d'une marche aléatoire $(m_x)_{x \in X}$. Supposons que pour tous points $x, y \in X$ on ait $\kappa(x, y) \geq \kappa > 0$. La marche aléatoire (m_x) admet alors une unique mesure de probabilité invariante, que nous noterons μ .

Soit

$$D_x^2 := \frac{\sigma(x)^2}{n_x \kappa}$$

et

$$D^2 := \mathbb{E}_\mu D_x^2$$

et supposons que la fonction $x \mapsto D_x^2$ est C -lipschitzienne et que $\sigma_\infty < \infty$. Posons

$$t_{\max} := \frac{D^2}{\max(\sigma_\infty, 2C/3)}$$

Alors, pour toute fonction 1-lipschitzienne $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, pour $0 \leq t \leq t_{\max}$ on a

$$\mu(\{x, f(x) \geq \mathbb{E}_\mu f + t\}) \leq \exp - \frac{t^2}{6D^2}$$

et pour $t \geq t_{\max}$

$$\mu(\{x, f(x) \geq \mathbb{E}_\mu f + t\}) \leq \exp \left(- \frac{t_{\max}^2}{6D^2} - \frac{t - t_{\max}}{\max(3\sigma_\infty, 2C)} \right)$$

Exemples. Illustrons la manière dont ce théorème s'applique. Les constantes numériques de ce théorème ne sont pas optimales et offrent peu d'intérêt, et on les absorbera dans la notation \approx , qui signifie une égalité à une constante multiplicative près (constante ne dépendant d'aucun paramètre).

Soit m_x la marche aléatoire de pas ε sur une variété riemannienne X de dimension N à courbure de Ricci positive. Pour ε petit, la mesure μ est arbitrairement proche de la mesure de volume normalisée. On a $\sigma(x) \approx \varepsilon$ et $n_x \approx N$ pour tout x , et on a vu (exemple 16) que $\kappa \approx \frac{\varepsilon^2 \inf \text{Ric}}{N}$ où $\inf \text{Ric}$ est l'infimum de la courbure de Ricci ordinaire sur la variété. On obtient donc $D^2 \approx 1/\inf \text{Ric}$ (indépendamment de ε assez petit) comme dans le théorème de Gromov–Lévy. Il n'y a pas de régime exponentiel : en effet on a $\sigma_\infty = 2\varepsilon$ et on peut prendre $C = 0$, et donc t_{\max} tend vers l'infini pour ε petit, ce qui signifie que seul le régime gaussien apparaît.

Soit m_x la marche aléatoire de pas $1/N$ sur le cube discret $\{P, F\}^N$ (toujours muni de la métrique L^1 où chaque arête est de taille $1/N$). On a vu que $\kappa \approx 1/N$. Ici on a $\sigma(x) \approx 1/N$ et $n_x \approx 1$, et donc on obtient $D^2 \approx 1/N$, la même variance que dans le théorème de concentration sur le cube. De plus on a $\sigma_\infty \approx 1/N$ et $C = 0$, et donc

$t_{\max} \approx 1$ qui est du même ordre que le diamètre du cube. Le régime exponentiel n'est donc pas visible.

Notre dernier exemple illustre l'aspect exponentiel. Observons tout d'abord que le théorème passe très bien à la limite de marches aléatoires à temps continu. En effet, prenons un paramètre α très petit, et remplaçons m_x par $(1 - \alpha)\delta_x + \alpha m_x$, qui est la même marche aléatoire avec un taux de saut α par unité de temps. Il est facile de voir que lorsque $\alpha \rightarrow 0$, $\sigma(x)$ se comporte comme $\sqrt{\alpha}$ tandis que κ se comporte comme α et n_x tend vers une constante, de sorte que D^2 a une limite finie.

Considérons alors une marche aléatoire à temps continu sur \mathbb{N} , dont la probabilité de transition de $k \in \mathbb{N}^*$ vers $k - 1$ est $2k$ par unité de temps, tandis que la probabilité de transition de $k - 1$ vers k est k par unité de temps. Il est facile de voir que la mesure géométrique $\mu(k) := 2^{-k+1}$ est invariante. On calcule immédiatement que $\sigma(k)^2$ vaut $3k + 1$ par unité de temps, et que κ vaut 1 par unité de temps (et $n_k = 1$). On trouve alors $D_k^2 \approx k$ et $D^2 \approx 1$. Mais ici on a $C = 3$ et $\sigma_\infty = 2$ et donc $t_{\max} \approx 1$ de sorte que le régime gaussien n'existe pas.

Amusons-nous à tensoriser cet exemple N fois, c'est-à-dire à considérer la marche aléatoire produit sur \mathbb{N}^N (muni de la métrique L^1) dont la projection sur chaque composante est celle ci-dessus. On constate alors que σ^2 est multiplié par N mais que κ ne change pas, et donc, la variance D^2 est multipliée par N comme on pouvait s'y attendre. Le point intéressant est que $t_{\max} \approx N$, ce qui veut dire qu'un régime gaussien apparaît quand N est grand. On obtient ainsi une version quantitative du théorème central limite, avec une estimation assez précise de la largeur de la fenêtre gaussienne avant le régime exponentiel (qui ne disparaît jamais totalement, puisque chaque composante reste de loi géométrique). Sur cet exemple, la transition entre les régimes gaussien et exponentiel peut en fait être calculée explicitement, et on vérifie que les ordres de grandeur sont les bons.

Commentaires. L'hypothèse que D_x^2 est une fonction lipschitzienne (ou, en fait, bornée par une fonction lipschitzienne) revient à dire que la constante de diffusion discrète croît au plus linéairement. C'est une hypothèse bien connue dans le monde des diffusions ou des marches aléatoires, puisque c'est celle sous laquelle sont en général énoncés les théorèmes d'existence d'un processus aléatoire étant donné son générateur. Sans les hypothèses que D_x^2 est lipschitzienne et que la granularité σ_∞ est finie, on peut facilement fabriquer des exemples de courbure positive où la concentration de la mesure n'est ni gaussienne ni exponentielle.

Un des points importants du résultat est que la variance D^2 obtenue est la *moyenne* des estimées locales D_x^2 , et non un sup (le sup était infini dans notre dernier exemple). Ceci rappelle le théorème d'Efron–Stein (qui porte uniquement sur la variance, pas sur la concentration) bien connu des statisticiens [Mas07]. Dans le cas particulier des espaces produits, Lugosi et Massart [BLM03] ont démontré une version « gaussienne-exponentielle » du théorème d'Efron–Stein. Notre énoncé est donc dans le même esprit, mais ici la courbure de Ricci positive permet d'aller au-delà des espaces produits; d'une certaine manière, la courbure positive permet de généraliser l'indépendance, et de traiter une sphère ou une gaussienne de la même manière.

Enfin, notons qu’une fois que les bonnes notions ont été posées, la démonstration du théorème 24 est relativement simple.

3.3 Autres résultats en courbure positive

Les espaces dont la courbure de Ricci discrète est minorée par une constante strictement positive satisfont d’autres propriétés, outre la concentration. Nous ne ferons ici que les survoler.

Dans un certain nombre de cas, il y a une petite perte dans les constantes numériques par rapport aux théorèmes riemanniens correspondants. Ceci doit être attendu dans un contexte qui ne distingue pas discret et continu ; les inégalités obtenues sont souvent optimales pour certains exemples discrets. En tout état de cause la perte sur les constantes est bornée (par un facteur 8).

- La définition a plusieurs conséquences immédiates. Notons l’existence d’une unique distribution invariante μ , vers laquelle la marche aléatoire donnée par les (m_x) converge exponentiellement vite en distance de transport. Cela permet de retrouver très rapidement des estimations de *temps de mélange* [DS96] pour les chaînes de Markov. On démontre aussi très simplement (dualité de Kantorovich [Vil03]) que la marche aléatoire est contractante en norme lipschitz, ou encore que la courbure de Ricci discrète satisfait une propriété de tensorisation très commode. Enfin, si la distance de transport entre x et m_x est uniformément bornée, l’espace est borné, ce qui est analogue au théorème de Bonnet–Myers pour les variétés (théorème 4).
- Comme la définition de la courbure de Ricci discrète ne fait intervenir que des inégalités portant sur la distance et les mesures, il est très facile de montrer que si une suite d’espaces métriques converge au sens de Gromov–Hausdorff [BBI01] vers un espace métrique donné, et si bien sûr les mesures (m_x) convergent également, alors la courbure de Ricci discrète converge aussi.
- Sous certaines hypothèses techniques, la valeur de la courbure de Ricci discrète donne une borne inférieure pour le *trou spectral* du laplacien naturellement associé à la marche aléatoire (m_x) . Ceci généralise le *théorème de Lichnerowicz* pour les variétés riemanniennes.
- On peut généraliser les principaux résultats de la théorie de Bakry et Émery, à savoir la *contraction de gradient* et l’*inégalité de Sobolev logarithmique* (on renvoie à [ABCFGMRS00] pour une introduction à cette dernière). Pour cela, il faut utiliser une notion de « norme du gradient semi-locale » dépendant d’un paramètre $\lambda > 0$. On pose

$$\nabla_\lambda f(x) := \sup_{y, y' \in X} \frac{|f(y) - f(y')|}{d(y, y')} e^{-\lambda d(x, y) - \lambda d(y, y')}$$

qui est en quelque sorte une constante de Lipschitz « autour de x » et redonne la norme du gradient ordinaire lorsque $\lambda \rightarrow \infty$. Mais selon la situation, il y a une valeur maximale de λ utilisable : pour une variété on peut prendre $\lambda \rightarrow \infty$ et récupérer le gradient habituel, mais pour un graphe on doit prendre λ d'ordre 1. Avec ce gradient, on peut alors démontrer l'inégalité de Sobolev logarithmique

$$\text{Ent}_\mu f := \int f \log f \, d\mu \leq \left(\sup_x \frac{4\sigma(x)^2}{\kappa n_x} \right) \int \frac{(\nabla_\lambda f)^2}{f} \, d\mu$$

pour toute fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ telle que $\nabla_\lambda f < \infty$. (Plus exactement, il s'agit d'une inégalité de Sobolev logarithmique modifiée [BL98], puisque certains des exemples de courbure positive sont précisément des espaces pour lesquels les inégalités de Sobolev logarithmiques modifiées ont été introduites.) On démontre aussi l'inégalité de contraction de gradient

$$\nabla_\lambda(P^t f) \leq (1 - \frac{\kappa}{2})^t P^t(\nabla_\lambda f)$$

où P^t (pour t entier) est l'opérateur de moyenne associé à la marche aléatoire m_x .

À noter qu'en principe l'inégalité de Sobolev logarithmique implique la concentration gaussienne, par un argument bien connu de Herbst. Or on a vu qu'ici la concentration pouvait parfois être exponentielle plutôt que gaussienne. Mais l'utilisation du gradient semi-local ∇_λ fait que l'argument de Herbst s'interrompt justement à cette valeur de λ , et donne précisément de la concentration gaussienne puis exponentielle.

- La courbure nulle n'implique pas la concentration de la mesure, comme on le voit immédiatement pour l'espace euclidien. Cependant, la courbure positive ou nulle combinée à l'existence d'un point « localement attractif » pour la marche aléatoire implique la concentration exponentielle. L'exemple le plus élémentaire est ici la marche aléatoire sur \mathbb{N} qui va vers la gauche avec probabilité $p > 1/2$ et vers la droite avec probabilité $1 - p$, pour laquelle le point 0 est localement attractif : la courbure est nulle partout sauf en 0 où elle est strictement positive, et la mesure invariante est géométrique.
- Dans un travail en cours avec Aldéric Joulin, étendant l'une de ses idées précédentes [Jou], nous utilisons la courbure discrète positive pour obtenir des bornes sur la *convergence des moyennes empiriques* pour les chaînes de Markov. Un point important est que ces bornes sont non asymptotiques et peuvent être évaluées en pratique à partir de quantités connues a priori en fonction de la chaîne de Markov.

3.4 Quelques problèmes ouverts

Mentionnons pour finir quelques questions qui se posent naturellement au vu de ces résultats. (La numérotation adoptée reprend celle de mon texte *A survey of Ricci*

curvature for metric spaces and Markov chains, dont cette introduction est en partie une traduction.)

PROBLÈME A (MESURES LOG-CONCAVES).

Nous avons vu que la courbure de Ricci de l'espace euclidien muni d'une mesure gaussienne est positive, et cela se généralise à toute mesure uniformément strictement log-concave assez lisse. Qu'en est-il pour une mesure log-concave quelconque, ou pour un ensemble convexe (muni par exemple du brownien réfléchi au bord), dont le bord est de courbure positive en un sens intuitif ?

PROBLÈME B (VARIÉTÉS FINSLERIENNES).

Nous avons vu que la courbure de Ricci discrète de \mathbb{R}^N muni d'une distance L^p est nulle. Est-ce que, plus généralement, cette notion est intéressante dans les variétés finslériennes, munies d'un processus pertinent ? (Voir par exemple [OS].)

PROBLÈME C (GROUPES NILPOTENTS).

Nous avons vu que la courbure de \mathbb{Z}^N est nulle. Qu'en est-il pour des groupes nilpotents discrets ou continus ? Par exemple, sur le groupe de Heisenberg discret $\langle a, b, c \mid ac = ca, bc = cb, [a, b] = c \rangle$, la marche aléatoire naturelle correspondant au laplacien hypoelliptique du groupe de Heisenberg continu est engendrée par a et b . Comme la plus petite relation entre ces générateurs est de longueur 8, il est clair que la courbure de Ricci discrète est négative à petite échelle, mais tend-elle vers 0 aux plus grandes échelles ?

PROBLÈME T (EXPANSEURS).

Existe-t-il une famille de graphes expanseurs à courbure de Ricci discrète positive ou nulle ? (Une famille de graphes expanseurs est une famille de graphes finis, de taille tendant vers l'infini, de degré borné, et dont le trou spectral est uniformément minoré. Intuitivement, de tels graphes sont plutôt à courbure négative.)

PROBLÈME L (THÉORÈME DE BISHOP–GROMOV, ETC.).

Est-il possible de généraliser davantage de résultats riemanniens traditionnels utilisant la courbure de Ricci ? Par exemple, peut-on obtenir un théorème de comparaison de volume analogue à Bishop–Gromov, et peut-on retrouver l'aspect isopérimétrique du théorème de Gromov–Lévy (dont nous n'avons généralisé que l'aspect concentration) ? Le problème est que ces théorèmes utilisent comme point de comparaison un espace de référence (la sphère d'une certaine dimension), ce qui est pertinent pour une variété mais sans doute pas pour un espace métrique discret comme le cube. Par exemple, dans le cube, la croissance de la taille des boules est exponentielle aux petits rayons, ce qui diffère fortement du comportement d'une variété.

PROBLÈME K (DÉFINITION DE STURM–LOTT–VILLANI).

Y a-t-il un rapport quelconque entre notre notion de courbure de Ricci discrète et la notion de borne inférieure pour la courbure de Ricci définie par Sturm et Lott–Villani [Stu06, LV] ? Cette dernière semble s'appliquer surtout à des limites de variétés riemanniennes et est difficilement adaptable à des espaces discrets [BS], mais des résultats

supplémentaires ont été démontrés. Par exemple, le critère de courbure-dimension $CD(K, n)$ implique l'inégalité de Brunn–Minkowski et le théorème de comparaison de Bishop–Gromov. Notre notion de courbure de Ricci discrète semble comparable à la condition plus faible $CD(K, \infty)$.

PROBLÈME F (CONSTANTE OPTIMALE DANS LE THÉORÈME DE LICHNEROWICZ).

Le théorème de Lichnerowicz minore le trou spectral du laplacien sur une variété riemannienne par $\frac{N}{N-1}$ fois l'infimum de la courbure de Ricci. Notre méthode appliquée à la marche aléatoire de pas ε sur une variété riemannienne donne seulement l'infimum de la courbure de Ricci, sans le facteur $\frac{N}{N-1}$. Ce résultat est optimal en toute généralité (par exemple pour le cube discret ou le processus d'Ornstein–Uhlenbeck, où on a égalité), mais peut-on exprimer dans notre langage une propriété qui permettrait d'obtenir le facteur $\frac{N}{N-1}$ dans le cas des variétés ?

PROBLÈME R (DIMENSION ET THÉORÈME DE BONNET–MYERS).

Le théorème qui nous sert d'analogie au théorème de Bonnet–Myers ressemble à une version L^1 de ce dernier plutôt qu'à une généralisation à proprement parler. Il est optimal en toute généralité (par exemple pour le cube). Nous avons donné une condition plus forte, inspirée de très près par le cas des variétés, qui permet d'obtenir un énoncé beaucoup plus proche du théorème de Bonnet–Myers classique, à savoir la condition

$$W_1(m_x^{*t}, m_{x'}^{*t'}) \leq e^{-\kappa \inf(t, t')} d(x, x') + \frac{C(\sqrt{t} - \sqrt{t'})^2}{2d(x, x')}$$

pour toute paire de points x, x' et pour toute paire de temps t, t' assez petits (auparavant on ne considérait que $t = t'$). La constante C ressemble à une dimension. Est-elle reliée à la « dimension » dans la condition $CD(K, n)$ de Bakry–Émery ?

PROBLÈME E (TROU SPECTRAL NON RÉVERSIBLE).

L'estimation du trou spectral par la courbure de Ricci discrète que nous avons obtenue n'est démontrée que lorsque la mesure invariante μ est *réversible* par rapport à la marche aléatoire (m_x) , hypothèse couramment admise dans l'étude des marches aléatoires, ou bien lorsque X est fini. Cette hypothèse est-elle nécessaire ? (Dans le cas non réversible, il y a plusieurs manières a priori non équivalentes de définir le trou spectral.)

PROBLÈME M (DÉCROISSANCE DE L'ENTROPIE).

L'inégalité de Sobolev logarithmique non modifiée (i.e. celle comparant $\text{Ent } f^2$ à $\int |\nabla f|^2$, et non $\text{Ent } f$ à $\int |\nabla f|^2 / f$) entraîne classiquement une décroissance exponentielle de l'entropie sous l'action de la marche aléatoire. Qu'en est-il dans notre cadre ? Une fois de plus, il faut garder en tête certains exemples de courbure positive comme les distributions binomiales, pour lesquelles la forme modifiée de l'inégalité de Sobolev logarithmique avait dû être introduite.

PROBLÈME S (ESPACES D'ALEXANDROV).

Les espaces de courbure sectionnelle positive au sens d'Alexandrov sont-ils de courbure de Ricci discrète positive, pour un certain choix de (m_x) ? Cela semble également une question ouverte avec la définition de Sturm–Lott–Villani.

PROBLÈME P (COURBURE SECTIONNELLE DISCRÈTE).

Une notion analogue à la courbure sectionnelle positive serait de demander qu'il existe un transport de m_x vers m_y tel que *tous les points* sont déplacés d'au plus $d(x, y)$, et non seulement en moyenne. Cela revient à remplacer la distance W_1 par la distance de Wasserstein W_∞ . Obtient-on des propriétés intéressantes? Peut-on modifier cette définition pour obtenir une valeur non nulle pour cette courbure? (Avec cette définition, la contribution de x et y dans m_x et m_y empêchera en général d'avoir une courbure strictement positive.) Y a-t-il un rapport avec la courbure sectionnelle positive au sens d'Alexandrov?

PROBLÈME Q (COURBURE SCALAIRE DISCRÈTE).

En géométrie riemannienne, la courbure scalaire discrète, dont nous n'avions pas encore parlé, est la moyenne de la courbure de Ricci sur tous les vecteurs tangents en un point. Elle contrôle par exemple la croissance du volume des boules. Ici on pourrait poser $S(x) := \int \kappa(x, y) m_x(dy)$. Que peut-on en dire?

PROBLÈME N (FLOT DE RICCI DISCRET).

On peut tenter de définir un « flot de Ricci discret » en changeant la distance sur X au cours du temps en fonction de la courbure :

$$\frac{d}{dt}d(x, y) = -\kappa(x, y) d(x, y)$$

où $\kappa(x, y)$ est calculé en utilisant la valeur courante de la distance $d(x, y)$. Cela revient à remplacer la distance $d(x, y)$ par $(1 - dt) d(x, y) + dt W_1(m_x, m_y)$ (voir aussi [MT]). Il n'est pas évident si l'on doit conserver le même noyau de transition (m_x) au cours du temps, ou bien le faire évoluer en fonction de la distance (ce qui correspond plus au flot de Ricci ordinaire). Peut-on en dire quelque chose d'intéressant?

PROBLÈME O (À δ PRÈS).

L'inégalité $W_1(x, y) \leq (1 - \kappa) d(x, y)$ est contraignante lorsque x et y sont très proches. Pour éliminer l'influence des très petites échelles, on peut s'inspirer de la définition des espaces δ -hyperboliques et définir une « courbure de Ricci positive à δ près » par l'inégalité

$$W_1(x, y) \leq (1 - \kappa) d(x, y) + \delta$$

Alors la courbure positive devient une propriété *ouverte* en topologie de Gromov–Hausdorff. Lesquels de nos résultats s'étendent à ce cadre?

4 Courbure à grande échelle : physique statistique relativiste

Par physique statistique relativiste, on entend en général l'étude des objets classiques de la physique statistique (fluides ou autres systèmes de particules) dans un contexte où la relativité ne peut pas être négligée. Mais ici, c'est sur l'espace-temps lui-même que nous ferons la statistique. Nous considérerons donc les effets sur l'espace-temps de diverses fluctuations, comme par exemple des ondes gravitationnelles ou des fluctuations de la densité de matière.

L'objectif est d'obtenir une description effective de l'influence moyenne de ces fluctuations à des échelles où elles sont trop petites pour être directement observables (comme l'échelle de l'univers lui-même). En effet, la théorie de la relativité générale étant non linéaire, il n'est pas vrai que des fluctuations de moyenne nulle produisent un effet moyen nul sur la dynamique à grande échelle de l'univers, comme cela serait le cas avec la théorie de Newton.

L'équation d'Einstein liant la courbure de Ricci au contenu en matière de l'espace-temps, on aura besoin de comparer la courbure de Ricci d'une métrique régulière à celle de la même métrique perturbée. La non-linéarité du passage de la métrique vers la courbure produira un effet a priori non nul en moyenne, qui s'interprète par l'équation d'Einstein comme une *matière apparente* qui résume les effets moyens des irrégularités.

Il s'agit non d'une étude mathématique, mais bien d'isoler un effet physique. En particulier, nous ne présenterons pas de théorèmes. L'approche utilisée ici a été initiée par Fabrice Debbasch [Deb04, Deb05] (après d'autres tentatives, voir par exemple [Zal97, Buc00]), qui a défini en toute généralité un modèle de champ moyen pour la relativité générale.

4.1 Un peu de relativité générale

Commençons par quelques rappels trop rapides de relativité générale. Nous renvoyons par exemple à l'ouvrage de référence [Wal84].

Notation d'Einstein pour le calcul tensoriel. On adoptera ici la *notation d'Einstein* pour noter les vecteurs tangents et les tenseurs sur une variété. Cette notation consiste à faire suivre chaque objet d'indices arbitraires indiquant son type ainsi que les différentes contractions entre l'espace et son dual.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie (par exemple, l'espace tangent à une variété M en un point x). On notera un élément de E avec un indice (symbole arbitraire souvent pris dans l'alphabet grec) en haut. On notera une forme linéaire sur E , c'est-à-dire un élément de E^* , avec un indice arbitraire en bas. Une forme bilinéaire sur E est un élément de $E^* \otimes E^*$ et portera ainsi deux indices en bas.

Si on dispose d'un vecteur $v^\alpha \in E$ et d'une forme linéaire $f_\beta \in E^*$, on peut bien sûr évaluer la forme sur le vecteur, ce qui est une application $E^* \otimes E \rightarrow \mathbb{R}$. Cette opération est indiquée par la répétition d'indice, ainsi, $f_\alpha v^\alpha$ est un élément de \mathbb{R} . Par

contre, $f_\alpha v^\beta$ est simplement un élément de $E^* \otimes E$ égal au produit tensoriel de f_α et v^β .

Notons que (en dimension finie) l'espace $L(E)$ des applications linéaires de E dans E s'identifie à $E \otimes E^*$. Ainsi, si $f_\mu^\nu \in E \otimes E^*$ est une application linéaire et $v^\alpha \in E$ un vecteur, l'image de v^α par f_μ^ν est le vecteur $f_\mu^\nu v^\alpha \in E$ obtenu en évaluant la deuxième composante de f_μ^ν sur le vecteur v^α . (Remarquer bien sûr la similarité avec l'application d'une matrice à un vecteur.) L'identité de E dans E est en général notée δ_μ^ν .

La *trace* est simplement l'application de $L(E) \simeq E \otimes E^*$ dans \mathbb{R} qui consiste à évaluer la deuxième composante sur la première. Ainsi, la trace de $f_\mu^\nu \in E \otimes E^*$ est f_μ^μ .

C'est alors un simple exercice de vérifier qu'étant donné une base de E , on peut trouver les coordonnées d'un tenseur dans cette base en interprétant chaque indice comme un numéro dans la base, et en sommant sur les indices répétés.

Par exemple, soit $g_{\mu\nu} \in E^* \otimes E^*$ une forme bilinéaire sur E . Alors si v^α, w^β sont des vecteurs de E , l'objet $g_{\mu\nu} v^\alpha w^\beta$ appartient à $E^* \otimes E^* \otimes E \otimes E$, tandis que le nombre $g_{\mu\nu} v^\mu w^\nu$ est l'image du précédent par l'évaluation de la première composante sur la troisième et de la deuxième sur la quatrième, qui est tout simplement le produit scalaire de v^μ et w^ν pour la forme quadratique $g_{\mu\nu}$. L'objet $g_{\mu\nu} v^\mu \in E^*$ est, lui, une forme linéaire qui, évaluée sur un vecteur, renverra son produit scalaire avec v^μ . Si, en outre, la forme bilinéaire $g_{\mu\nu} \in E^* \otimes E^* \simeq L(E, E^*)$ est non dégénérée, elle a un inverse qui est un élément de $L(E^*, E) \simeq E \otimes E$, noté généralement $g^{\mu\nu}$ avec le même nom mais les indices en haut.

Ces notations seront utilisées par la suite dans le cas où E est l'espace tangent à une variété en un point donné. Les éléments de $E^{\otimes p} \otimes (E^*)^{\otimes q}$ seront appelés (p, q) -tenseurs. Par exemple, une métrique sur une variété est un une forme bilinéaire c'est-à-dire un $(0, 2)$ -tenseur.

Cette notation est très utile en géométrie riemannienne ou lorentzienne. (Par exemple, si ∇_α est la connexion de Levi-Civita, alors $\nabla_\alpha f$ est la différentielle de la fonction f , sa hessienne est la forme bilinéaire $\nabla_\alpha \nabla_\beta f$, son laplacien est $g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta f$; la divergence d'un champ de vecteurs v^β est $\nabla_\beta v^\beta$, et l'opérateur de courbure de Riemann est juste $\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha$ sans qu'il y ait besoin de crochets de Lie dans la définition...)

Variétés lorentziennes. Rappelons qu'une variété munie d'une *métrique lorentzienne* est une variété de dimension $N + 1$ munie, en chaque point, d'une forme bilinéaire de signature $(N, 1)$, de sorte que localement on peut trouver des coordonnées (t, x_1, \dots, x_N) où la métrique est de la forme $-dt^2 + dx_1^2 + \dots + dx_N^2$. (On a pris la vitesse de la lumière égale à 1.) Nous ne discuterons pas ici les raisons physiques de ce choix, qui sont décrites dans tout texte d'introduction à la relativité restreinte.

Nous avons défini plus haut la courbure de Ricci d'une variété riemannienne. La définition que nous avons donnée en mesurant des distances ne se transpose pas directement au cas lorentzien (une variété lorentzienne n'est pas un espace métrique), mais les formules explicites qu'on obtient pour calculer la courbure dans le cas rie-

mannien ont encore un sens dans le cas lorentzien, et ce c'est par elles que l'on définit la courbure de Ricci.

Nous avons vu que la courbure de Ricci le long d'un vecteur tangent v est une forme quadratique $\text{Ric}(v, v)$. La courbure de Ricci définit ainsi un $(0, 2)$ -tenseur, noté le plus souvent $R_{\mu\nu}$, tel que la courbure de Ricci le long de v^μ est $R_{\mu\nu}v^\mu v^\nu$.

L'équation d'Einstein. Un *espace-temps* est la donnée d'une variété M de dimension 4, d'une métrique lorentzienne $g_{\mu\nu}$ sur M , et d'un $(0, 2)$ -tenseur T appelé *tenseur d'énergie-impulsion* de la matière, tel que l'équation d'Einstein soit satisfaite

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}g_{\mu\nu} = 8\pi\chi T_{\mu\nu}$$

où $R_{\mu\nu}$ est le tenseur de Ricci de la métrique $g_{\mu\nu}$ et χ est une constante reliée à la constante de gravitation ($\chi = 1$ dans les unités canoniques).

Bien sûr, on peut toujours se donner une métrique $g_{\mu\nu}$ arbitraire, calculer le tenseur d'Einstein $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}g_{\mu\nu}$ associé à $g_{\mu\nu}$, et choisir $T_{\mu\nu}$ en fonction, mais on souhaite que le tenseur d'énergie-impulsion obtenu soit physiquement pertinent et décrive la matière.

Dans le cas classique, le tenseur d'énergie-impulsion d'un fluide de densité ρ et de vitesse v est $\rho v \otimes v$, et décrit les flux de la quantité de mouvement ρv . En relativité générale on cherchera donc très souvent des tenseurs d'énergie-impulsion de la forme $T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu$ où u_μ est la quadrivitesse du fluide. Une forme un peu plus générale prenant en compte la pression P est

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + P(g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu)$$

(noter que $g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu$ est simplement la métrique restreinte à l'orthogonal de u_μ , autrement dit la partie spatiale de la métrique dans le référentiel de la particule).

Par exemple, dans les modèles les plus simples, à l'échelle de l'univers les galaxies sont traitées comme un fluide de pression nulle (« poussière »).

On peut aussi décrire le tenseur d'énergie-impulsion associé à un champ électromagnétique ou d'autres types de champs, qui ne seront pas mentionnés ici.

Pour différentes raisons (physiquement, des raisons d'homogénéité, ou mathématiquement parce que l'impulsion est plutôt un élément de l'espace cotangent et donc le tenseur d'énergie-impulsion est $p \otimes v$), on préfère multiplier les objets intervenant dans l'équation d'Einstein par l'inverse de la métrique et écrire cette équation sous la forme

$$R^\nu_\mu - \frac{1}{2}R^\alpha_\alpha \delta^\nu_\mu = 8\pi T^\nu_\mu$$

En effet, les coordonnées du tenseur T^ν_μ dans un référentiel s'interprètent plus directement comme des quantités physiques.

4.2 Un modèle de champ moyen pour la relativité générale

Le modèle de champ moyen introduit dans [Deb04] consiste à se donner une variété M fixée, munie d'une métrique aléatoire. Par exemple, la métrique peut être celle d'un univers homogène et isotrope auquel on ajoute des ondes gravitationnelles de direction aléatoire. On suppose que l'observateur ne voit pas directement les fluctuations. Il faut alors comparer l'évolution moyenne des métriques ayant des ondes gravitationnelles, à celle de la métrique homogène de référence perçue par l'observateur.

Le modèle est le suivant. Soit M une variété fixée, et soit $g_{\mu\nu}$ une métrique aléatoire sur M ; la loi de $g_{\mu\nu}$ caractérise le type de fluctuations considérées. À la métrique aléatoire $g_{\mu\nu}$ correspond un tenseur d'énergie-impulsion aléatoire $T_{\mu\nu}$ par l'équation d'Einstein. En général, on définit plutôt la loi de $g_{\mu\nu}$ en se donnant un modèle pour les fluctuations de matière $T_{\mu\nu}$ et en essayant de définir $g_{\mu\nu}$ en fonction.

Définissons la métrique

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \mathbb{E}g_{\mu\nu}$$

qui est une métrique sur M (en effet, l'espace des formes bilinéaires sur une variété donnée est un espace vectoriel). Pour des modèles de fluctuations raisonnables, $\bar{g}_{\mu\nu}$ est encore de signature $(3, 1)$. L'idée est que $\bar{g}_{\mu\nu}$ représente la métrique moyenne perçue par l'observateur.

Cette métrique $\bar{g}_{\mu\nu}$ définit une courbure de Ricci \bar{R}_{μ}^{ν} , qui à son tour définit un tenseur d'énergie-impulsion \bar{T}_{μ}^{ν} par l'équation d'Einstein

$$\bar{R}_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2}\bar{R}^{\alpha}_{\alpha}\delta_{\mu}^{\nu} = 8\pi\bar{T}_{\mu}^{\nu}$$

mais, comme la courbure de Ricci n'est pas une fonction linéaire de la métrique, on a a priori

$$\bar{T}_{\mu}^{\nu} \neq \mathbb{E}T_{\mu}^{\nu}$$

Autrement dit, un observateur ayant accès uniquement à la métrique moyenne $\bar{g}_{\mu\nu}$ et au contenu moyen en matière constatera une violation de l'équation d'Einstein.

Un cas amusant est celui où les fluctuations sont des ondes gravitationnelles : on a alors toujours $T_{\mu}^{\nu} = 0$, mais a priori \bar{T}_{μ}^{ν} est non nul. En particulier, un univers sans matière mais avec des ondes gravitationnelles aléatoires peut se comporter, en moyenne, comme un univers contenant de la matière. Physiquement, l'idée est que l'énergie d'auto-interaction des ondes gravitationnelles avec elles-mêmes va en moyenne influencer sur la dynamique à grande échelle de l'univers, comme si celui-ci contenait davantage de matière. Ceci évoque évidemment le problème de la matière noire.

On définit donc l'effet de « matière apparente » comme le terme supplémentaire que l'observateur doit ajouter pour que l'équation d'Einstein soit satisfaite :

$$T^{\text{app}\nu}_{\mu} := \bar{T}_{\mu}^{\nu} - \mathbb{E}T_{\mu}^{\nu}$$

et notre objectif est de quantifier cet effet.

4.3 La matière apparente dans l'univers

Avec F. Debbasch et C. Chevalier, nous avons estimé l'effet de matière apparente dans quelques situations. Par exemple, on peut faire un développement perturbatif autour de la métrique suivante, qui décrit un univers homogène et isotrope (modèle de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker) asymptotiquement plat, c'est-à-dire où la densité de matière est égale à la densité critique. La métrique est donnée par

$$ds^2 = \eta^4 \left(-d\eta^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \right)$$

Le temps physique est défini par $dt^2 = \eta^4 d\eta^2$ soit $t = \eta^3/3$. Par l'équation d'Einstein on obtient le tenseur d'énergie-impulsion associé, et on vérifie qu'il est de la forme $\rho u_\mu u^\nu$ où la quadri-vitesse u_μ est $(\eta^2, 0, 0, 0)$ (la matière est statique dans ces coordonnées) et la densité $\rho = \frac{3}{2\pi\eta^6}$ dans ces coordonnées ; la pression est nulle.

Nous avons considéré des petites perturbations autour de cette métrique, représentant soit des ondes gravitationnelles, soit des variations de la densité et de la vitesse de la matière.

Les perturbations à l'ordre 1 étant linéaires par définition, elles commutent avec l'espérance \mathbb{E} , et l'effet de matière apparente est donc d'ordre 2. Cela correspond à l'intuition physique que ce phénomène est relativiste et non newtonien, et résulte de l'interaction du champ gravitationnel avec lui-même.

Les conclusions sont les suivantes : l'effet est beaucoup plus important pour des ondes gravitationnelles que pour des fluctuations de matière. Pour des ondes gravitationnelles, la matière apparente obtenue a un tenseur d'énergie-impulsion $T^{\text{app}\nu}_\mu$ qui se comporte comme celui d'un fluide dont la densité d'énergie est $\varepsilon^2 n_{\text{osc}}^2 \rho/48$ et la pression $\varepsilon^2 n_{\text{osc}}^2 \rho/144$, où ε est l'amplitude relative de l'onde gravitationnelle et n_{osc} le nombre de périodes de l'onde dans l'univers observable à un instant donné. Notons qu'à cet ordre, la relation entre énergie et pression est celle attendue pour de la *radiation* classique.

Quant aux fluctuations de la matière (vitesse, densité), elles engendrent une matière apparente se comportant à cet ordre comme le carré de l'amplitude relative de la perturbation, sans effet de fréquence. Selon les caractéristiques de la fluctuation, la matière apparente peut être d'énergie positive ou négative, et il en est de même pour sa pression.

En pratique, dans ce modèle une seule onde gravitationnelle d'amplitude relative $\approx 10^{-5}$ et de fréquence $\approx 10^{-12}$ Hz (ce qui signifie que cette onde déforme un cercle parfait en une ellipse d'excentricité 10^{-5} au bout de cent mille ans) pourrait beaucoup changer la valeur effective de la densité d'énergie ρ . Une telle onde gravitationnelle n'est pas détectable avec les moyens techniques d'aujourd'hui [ZZ06].

Pour pouvoir donner des estimations plus précises, on doit bien sûr encore affiner ces calculs (qui sont perturbatifs) et en étendre la portée à des modèles d'univers un peu plus réalistes. Mais il semble clair que ces effets de matière apparente ne devraient pas être négligés en cosmologie.

*
* *

Nous espérons que ce parcours dans le monde des courbures et de quelques-unes de leurs applications aura distrait le lecteur. Peut-être même souhaitera-t-il étudier l'une des questions ouvertes que nous avons mentionnées...

Références

- [ABCFGMRS00] C. Ané, S. Blachère, D. Chafaï, P. Fougères, I. Gentil, F. Malrieu, C. Roberto, G. Scheffer, *Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques*, Panoramas et Synthèses **10**, Société Mathématique de France (2000).
- [BBI01] D. Burago, Y. Burago, S. Ivanov, *A course in metric geometry*, Graduate Studies in Mathematics **33**, AMS (2001).
- [BD97] R. Bubley, M. E. Dyer, *Path coupling: a technique for proving rapid mixing in Markov chains*, FOCS 1997, 223–231.
- [BE84] D. Bakry, M. Émery, *Hypercontractivité de semi-groupes de diffusion*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **299** (1984), n° 15, 775–778.
- [BE85] D. Bakry, M. Émery, *Diffusions hypercontractives*, Séminaire de probabilités, XIX, 1983/84. Lecture Notes in Math. **1123**, Springer, Berlin (1985), 177–206.
- [Ber03] M. Berger, *A panoramic view of Riemannian geometry*, Springer, Berlin (2003).
- [BH99] M. R. Bridson, A. Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **319**, Springer (1999).
- [BL98] S. Bobkov, M. Ledoux, *On modified logarithmic Sobolev inequalities for Bernoulli and Poisson measures*, J. Funct. Anal. **156** (1998), n° 2, 347–365.
- [BLM03] S. Boucheron, G. Lugosi, P. Massart, *Concentration inequalities using the entropy method*, Ann. Probab. **31** (2003), n° 3, 1583–1614.
- [BS] A.-I. Bonciocat, K.-T. Sturm, *Mass transportation and rough curvature bounds for discrete spaces*, preprint.
- [Buc00] T. Buchert, *On average properties of inhomogeneous cosmologies*, Gen. Rel. Grav. **32** (2000), 105–126.
- [Car92] M. P. do Carmo, *Riemannian geometry*, Mathematics: Theory & Applications, Birkhäuser (1992).
- [Deb04] F. Debbasch, *What is a mean gravitational field?*, Eur. Phys. J. B **37** (2004), n° 2, 257–270.
- [Deb05] F. Debbasch, *Mean field theory and geodesics in general relativity*, Eur. Phys. J. B **43** (2005), n° 1, 143–154.
- [DGW04] H. Djellout, A. Guillin, L. Wu, *Transportation cost–information inequalities and applications to random dynamical systems and diffusions*, Ann. Prob. **32** (2004), n° 3B, 2702–2732.
- [Dob70] R. L. Dobrušin, *Definition of a system of random variables by means of conditional distributions* (Russian), Teor. Veroyatnost. i Primenen. **15** (1970), 469–497. English translation: *Prescribing a system of random variables by conditional expectations*, Theory of Probability and its Applications **15** (1970) n° 3, 458–486.
- [Dob96] R. Dobrushin, *Perturbation methods of the theory of Gibbsian fields*, in R. Dobrushin, P. Groeneboom, M. Ledoux, *Lectures on probability theory and statistics*, Lectures from the 24th Saint-Flour Summer School held July 7–23, 1994, edited by P. Bernard, Lecture Notes in Mathematics **1648**, Springer, Berlin (1996), 1–66.
- [DS85] R. L. Dobrushin, S. B. Shlosman, *Constructive criterion for the uniqueness of Gibbs field*, in J. Fritz, A. Jaffe and D. Szász (eds), *Statistical physics and dynamical systems*, papers from the second colloquium and workshop on random fields: rigorous results in statistical mechanics, held in Köszeg, August 26–September 1, 1984, Progress in Physics **10**, Birkhäuser, Boston (1985), 347–370.

- [DS96] P. Diaconis, L. Saloff-Coste, *Logarithmic Sobolev inequalities for finite Markov chains*, Ann. Appl. Probab. **6** (1996), n° 3, 695–750.
- [GhH90] É. Ghys, P. de la Harpe, *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, Progress in Math. **83**, Birkhäuser (1990).
- [Ghy03] É. Ghys, *Groupes aléatoires*, séminaire Bourbaki **916** (2003). Paru dans Astérisque **294** (2004), 173–204.
- [GrH97] R.I. Grigorchuk, P. de la Harpe, *On problems related to growth, entropy, and spectrum in group theory*, Dynam. Control Systems **3** (1997), n° 1, 51–89.
- [Gro86] M. Gromov, *Isoperimetric inequalities in Riemannian manifolds*, in V. Milman, G. Schechtman, *Asymptotic theory of finite dimensional normed spaces*, Lecture Notes in Mathematics **1200**, Springer, Berlin (1986), 114–129.
- [Gro87] M. Gromov, *Hyperbolic groups*, in *Essays in group theory*, ed. S. M. Gersten, Springer (1987), 75–265.
- [Gro93] M. Gromov, *Asymptotic Invariants of Infinite Groups*, in *Geometric group theory*, ed. G. Niblo, M. Roller, Cambridge University Press, Cambridge (1993).
- [Gro99] M. Gromov, *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*, Progress in Math. **152**, Birkhäuser (1999).
- [Gro03] M. Gromov, *Random walk in random groups*, GAFA, Geom. Funct. Anal. **13** (2003), n°1, 73–146.
- [Jou07] A. Joulin, *Poisson-type deviation inequalities for curved continuous time Markov chains*, Bernoulli **13** (2007), n°3, 782–798.
- [Jou] A. Joulin, *A new Poisson-type deviation inequality for Markov jump process with positive Wasserstein curvature*, preprint.
- [Led01] M. Ledoux, *The concentration of measure phenomenon*, Mathematical Surveys and Monographs **89**, AMS (2001).
- [Lév22] P. Lévy, *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Gauthier-Villars, Paris (1922). Nouvelle édition en 1951 sous le titre *Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle*.
- [LV] J. Lott, C. Villani, *Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport*, preprint.
- [Mas07] P. Massart, *Concentration inequalities and model selection*, Lectures from the 33rd Summer School on Probability Theory held in Saint-Flour, July 6–23, 2003, Lecture Notes in Mathematics **1896**, Springer, 2007.
- [MT] R. J. McCann, P. M. Topping, *Ricci flow, entropy and optimal transportation*, preprint.
- [Oht07] S.-i. Ohta, *On the measure contraction property of metric measure spaces*, Comment. Math. Helv. **82** (2007), n° 4, 805–828.
- [Oli] R. Imbuzeiro Oliveira, *On the convergence to equilibrium of Kac's random walk on matrices*, preprint, [arXiv:0705.2253](https://arxiv.org/abs/0705.2253)
- [OS] S.-i. Ohta, K.-T. Sturm, *Heat flow on Finsler manifolds*, preprint.
- [OV00] F. Otto, C. Villani, *Generalization of an inequality by Talagrand and links with the logarithmic Sobolev inequality*, J. Funct. Anal. **173** (2000), 361–400.
- [RS05] M.-K. von Renesse, K.-T. Sturm, *Transport inequalities, gradient estimates, and Ricci curvature*, Comm. Pure Appl. Math. **68** (2005), 923–940.
- [Sch01] G. Schechtman, *Concentration, results and applications*, in *Handbook of the geometry of Banach spaces*, vol. 2, North-Holland, Amsterdam (2003), 1603–1634.

- [Stu06] K.-T. Sturm, *On the geometry of metric measure spaces*, Acta Math. **196** (2006), n° 1, 65–177.
- [Vil03] C. Villani, *Topics in optimal transportation*, Graduate Studies in Mathematics **58**, American Mathematical Society, Providence (2003).
- [Wal84] R. M. Wald, *General relativity*, University of Chicago Press, Chicago (1984).
- [Zal97] R. Zalaletdinov, *Averaging problem in general relativity, macroscopic gravity and using Einstein's equation in cosmology*, Bull. Astron. Soc. India **25** (1997), 401–416.
- [ZZ06] W. Zhao, Y. Zhang, *Relic gravitational waves and their detection*, Phys. Rev. D **74** (2006), n° 4, 043503.

Dossier scientifique

La démarche commune à la plupart des travaux présentés ici est l'étude géométrique d'objets quelconques, typiques, ou irréguliers. La typicalité est obtenue par l'utilisation, à un endroit ou à un autre, d'ingrédients aléatoires. Cela peut signifier que l'objet a été obtenu par tirage aléatoire dans sa classe, par perturbation aléatoire autour d'un modèle mieux compris, ou bien qu'un objet est fixé mais suffisamment inconnu pour que le seul point d'attaque consiste à l'observer aléatoirement.

Un des objectifs de cette géométrie « synthétique » ou « robuste » est d'obtenir des arguments qui, lorsqu'ils s'appliquent à un espace, s'appliquent aussi bien à des espaces « proches ». Ces derniers peuvent être, par exemple, des espaces discrets comme un graphe, ou bien des variétés dont la géométrie a un grand nombre de fluctuations ou d'irrégularités à très petite échelle.

Le premier invariant géométrique que l'on rencontre en s'éloignant de l'espace euclidien est la notion de courbure, qui apparaîtra souvent dans ces pages. On peut sommairement diviser son influence en deux continents : celui de la courbure négative (ou majorée), et celui de la courbure positive (ou minorée), qui interviendront tous deux ici.

Cette démarche sera appliquée à trois domaines assez différents. Dans le premier, il s'agit de *groupes aléatoires*, dont le comportement donne des indications sur ce que peut être un groupe quelconque, par opposition aux groupes classiques bien connus. Ici c'est la courbure négative qui domine : les groupes aléatoires sont *hyperboliques*, et beaucoup des propriétés qu'on leur connaît tournent autour de ce fait.

Dans le second, nous adopterons un point de vue géométrique sur les *chaînes de Markov*. On verra en particulier comment utiliser ces dernières pour définir une notion de *courbure (de Ricci)* sur des espaces métriques quelconques, qui permet d'étendre certaines propriétés classiques des variétés de courbure positive, comme la concentration de la mesure.

Enfin, la troisième partie, physique plus que mathématique, traite de *relativité générale* : l'équation d'Einstein lie la courbure au contenu en matière de l'espace-temps, et des fluctuations aléatoires à petite échelle, nulles en moyenne et non observées, peuvent avoir un effet non trivial sur la courbure à grande échelle de l'Univers. Cet effet physique de « matière apparente » est étudié dans différentes situations.

The common idea underlying the various works presented here is a geometric study of generic, typical, or irregular objects. Typicality is achieved through the use of random ingredients at one point or another. The object under scrutiny may have been picked at random in its class, or be a random perturbation of a smoother, more symmetric model, or just be a plain metric space with no particular features, for which random measurements provide the only reasonable approach.

One of the goals of this “coarse” or “robust” geometry is to develop geometric arguments that remain valid when considering objects that are “close” to a given one. The perturbed object might not be regular; typical examples include discrete spaces like graphs, or manifolds with many small fluctuations in their metric.

When departing from Euclidean space, the first geometric invariant encountered is curvature; this notion will pervade our work. Its influence can be broadly divided into two realms: that of positive curvature (or bounded below), and that of negative curvature (or bounded above), which entail very different behaviors. Both will be seen here to some extent.

Three fairly different applications will be used to illustrate these principles. Random groups will come first. Their behavior hints at what a “generic” group looks like, as opposed to the more classical groups we all learn about. Random groups belong with negatively curved spaces: they are hyperbolic, and most of their known features arise from hyperbolicity.

Next, we will develop a geometric viewpoint on Markov chains, and see how random walk considerations lead to a notion of (Ricci) curvature on arbitrary metric spaces. Several classical properties of positively curved manifolds, such as concentration of measure, extend to this setting.

A bit of general relativity will come last; our treatment there will be physical rather than mathematical. The Einstein equation relates the matter content of space-time to its curvature in a non-linear way, and small, unobserved fluctuations of matter may vanish on average, yet have a non-trivial effect on the large-scale curvature and dynamics of the Universe. This physical effect of an emerging “apparent matter” is investigated in a variety of situations.