# Courbure de Ricci et concentration de la mesure

Pierre Pansu
Édité par Yann Ollivier

16 mars 2004

On donne ici les idées essentielles de la preuve du théorème de Lévy-Gromov. Ce théorème est une propriété isopérimétrique de la sphère et des variétés « comparables » à la sphère, au sens où leur courbure de Ricci est supérieure à celle de la sphère.

À noter que la comparaison des courbures de Ricci est une hypothèse relativement faible (par rapport, par exemple, à la comparaison des courbures sectionnelles). Lévy ([Lév22]) avait prouvé le théorème pour des « convexes à rayons de courbure principaux inférieurs à 1 », et Gromov a affaibli l'hypothèse en introduisant la courbure de Ricci.

On renvoie à l'exposé d'introduction pour l'équivalence entre profil isopérimétrique et concentration de la mesure, qui est notre motivation ici.

Dans tout ce texte, si $A \subset X$ est une partie d'un espace métrique, on notera $A_\varepsilon$ l'ensemble des points de $X$ situés à distance strictement inférieure à $\varepsilon$ de $A$.

**Théorème 1 (Lévy-Gromov, [Lév22], [Gro86])** – *Soit $V$ une variété riemannienne compacte de dimension $n$ vérifiant $\operatorname{Ric} V \geqslant n-1 = \operatorname{Ric} S^n$. Soit $A$ une partie mesurable de $V$ et soit $A' \subset S^n$ une boule dans $S^n$ de même volume relatif (c'est-à-dire $\operatorname{vol} A / \operatorname{vol} V = \operatorname{vol} A' / \operatorname{vol} S^n$).*

*Alors pour tout $\varepsilon \geqslant 0$ on a*

$$\frac{\operatorname{vol} A_\varepsilon}{\operatorname{vol} V} \geqslant \frac{\operatorname{vol} A'_\varepsilon}{\operatorname{vol} S^n}$$

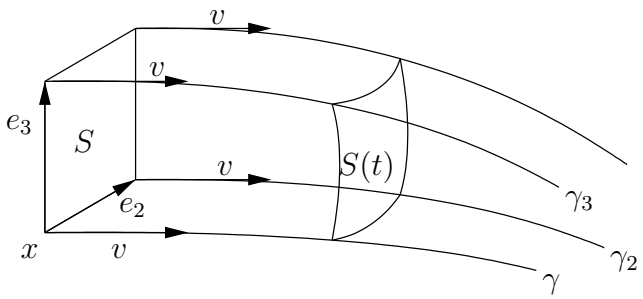
Habituellement, le terme « isopérimétrie » se réfère au $(n-1)$-volume du bord de $A$ (pour $A$ régulier) plutôt qu'au volume d'un $\varepsilon$-voisinage de $A$. Bien sûr, on a $\operatorname{vol}_{n-1} \partial A = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} (\operatorname{vol} A_\varepsilon - \operatorname{vol} A)$, de sorte que la comparaison des volumes des bords est impliquée par le théorème ci-dessus. Inversement, si on sait que pour tout $A$ on a l'inégalité de comparaison pour les mesures des bords, alors en utilisant la formule de la co-aire on obtient $d \operatorname{vol} A_\varepsilon / d\varepsilon = \operatorname{vol}_{n-1} \partial D_\varepsilon$ (on renvoie à [Fed69] pour les problèmes de régularité) pour tout $\varepsilon$ (ou presque). Il suffit alors de prendre pour sphère de comparaison une sphère dont la courbure de Ricci est *strictement* inférieure à celle de $M$ : alors on aura $d \operatorname{vol} A_\varepsilon / d\varepsilon\,(0) = \operatorname{vol}_{n-1} \partial A > \operatorname{vol}_{n-1} \partial A' = d \operatorname{vol} A'_\varepsilon / d\varepsilon\,(0)$ ce qui signifie que, pour les petits $\varepsilon$, on a $\operatorname{vol} A_\varepsilon > \operatorname{vol} A'_\varepsilon$ ; maintenant, considérant le plus petit $\varepsilon$ (s'il existait) pour lequel $\operatorname{vol} A_\varepsilon = \operatorname{vol} A'_\varepsilon$, et appliquant l'hypothèse à $A_\varepsilon$, on aurait que la dérivée de $\operatorname{vol} A_\varepsilon$ est supérieure à celle de $\operatorname{vol} A'_\varepsilon$, ce qui contredirait l'inégalité $\operatorname{vol} A_{\varepsilon'} > \operatorname{vol} A'_{\varepsilon'}$ pour $\varepsilon' < \varepsilon$.

# 1 Rappel : courbure de Ricci d'une variété

On donne ici une définition intuitive de la courbure de Ricci d'une variété riemannienne. Soit $V$ une variété riemannienne de dimension $n$. La courbure de Ricci de $V$ est une forme quadratique sur le fibré tangent, qui à tout vecteur tangent $v$ associe un nombre $\mathrm{Ric}(v,v)$ aussi noté $\mathrm{Ric}(v)$. On dit alors que la courbure de Ricci est supérieure à $k$ si pour tout $v$ on a $\mathrm{Ric}(v) \geqslant k\,|v|^2$. Ce nombre peut s'interpréter comme suit.

Soit donc $v$ un vecteur tangent à $M$ en un point $x$ ; prenons-le de norme 1. Soit $S$ un petit élément de $(n-1)$-surface orthogonal à $v$, engendré par exemple par des vecteurs $e_2, \ldots, e_n$ formant avec $v$ une base orthonormale.

Soit $\gamma$ la géodésique issue de $v$ et soient $\gamma_2, \ldots, \gamma_n$ les géodésiques issues des extrémités de $e_2, \ldots, e_n$ et partant parallèlement à $v$. En suivant toutes ces géodésiques pendant un temps $t$, on obtient un petit élément de surface $S(t)$ ancré au point de $\gamma$ situé à distance $t$ de $x$. Cet élément de surface $S(t)$ *n'est pas* a priori celui obtenu en transportant $S$ parallèlement le long de $\gamma$ : en effet, en présence de courbure les géodésiques $\gamma_2, \ldots, \gamma_n$ peuvent se rapprocher ou s'éloigner de $\gamma$.




On s'attend à ce que, si la courbure est positive, les géodésiques se rapprochent et donc que l'aire de $S(t)$ décroisse, et inversement si la courbure est négative. Comme les géodésiques $\gamma_2, \ldots, \gamma_n$ partent parallèlement à $\gamma$, la surface $\mathrm{vol}_{n-1}\, S(t)$ ne varie qu'au deuxième ordre en $t$. On a alors la propriété suivante, que l'on peut prendre comme définition de la courbure de Ricci :

$$\mathrm{vol}_{n-1}\, S(t) = \mathrm{vol}_{n-1}\, S(0) \left(1 - \frac{\mathrm{Ric}(v)}{2}\, t^2 + O(t^3)\right)$$

(voir aussi la section 3). Noter que le même phénomène se produit dans la direction $-v$.

Ainsi la courbure de Ricci mesure le comportement non euclidien des surfaces dans la direction $v$. Habituellement cette courbure est définie à partir du tenseur de courbure $\mathcal{R}$ par

$$\mathrm{Ric}(v) = \mathrm{trace}\{w \mapsto \mathcal{R}(v,w)v\}$$

et l'expression ci-dessus découle alors directement de l'équation de Jacobi régissant les géodésiques infiniment voisines d'une géodésique donnée.

# 2 Étapes de la preuve

**Régularité.** L'objectif est, parmi tous les domaines $A \subset V$ de volume donné, de déterminer le volume du bord minimal. La première étape, que nous ne détaillerons

pas, consiste à savoir que l'on peut supposer que le bord $\partial A$ est « suffisamment » régulier, par un résultat d'Almgren ([Alm76]) ; plus précisément, on peut travailler dans une partie seulement du bord de $D$, constituée de points où $\partial D$ est lisse. Soit donc un domaine $D \subset M$ suffisamment régulier, minimisant $\mathrm{vol}_{n-1}\,\partial D$ à $\mathrm{vol}\,D$ donné.

On donne plus de détails ci-dessous, après que la fin de la preuve aura dégagé l'ensemble des points de $\partial D$ sur lesquels il suffit de travailler.

**Courbure moyenne du bord.** On montre ici que, si $D \subset M$ est un domaine régulier minimisant $\mathrm{vol}_{n-1}\,\partial D$ à $\mathrm{vol}\,D$ fixé, alors la courbure moyenne de $\partial D$ dans $M$ est constante sur $\partial D$.

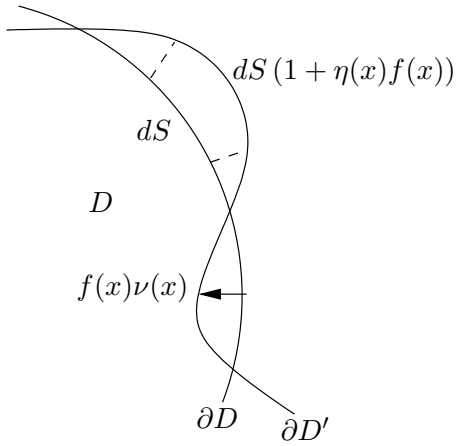
Ceci se prouve par un simple principe variationnel (Euler-Lagrange). En effet, soit $D'$ un domaine obtenu à partir de $D$ en suivant le long de $\partial D$ une déformation infinitésimale $f(x)\nu(x)$ où, pour $x \in \partial D$, on note $\nu(x)$ la normale extérieure à $\partial D$ et $f(x)$ est une fonction réelle sur $\partial D$. Le volume de $D'$ est, au premier ordre en la déformation $f$ :

$$\mathrm{vol}\,D' = \mathrm{vol}\,D + \int_{x\in\partial D} f(x)\,dx + o(|f|)$$

et le volume de $\partial D'$ est

$$\mathrm{vol}_{n-1}\,\partial D' = \mathrm{vol}_{n-1}\,\partial D + \int_{x\in\partial D} f(x)\eta(x)\,dx + o(|f|)$$

où $\eta(x)$ est la courbure moyenne de $\partial D \subset M$ au point $x$ (ceci peut servir de définition de la courbure moyenne — penser par exemple à un cercle de rayon $r$ dans le plan : en observant la variation de sa longueur lorsqu'on le déforme de $dt$ vers l'extérieur, on trouve que la courbure moyenne est $1/r$).




Le principe variationnel à appliquer est maintenant le suivant : on veut que, si la déformation préserve le volume de $D$, alors le volume de $\partial D$ reste inchangé au premier ordre (puisqu'il est supposé minimal) ; autrement dit, dès que $\int_{\partial D} f = 0$ on veut que $\int_{\partial D} f\eta = 0$, ce qui ne peut se produire que si $\eta$ est constante sur $\partial D$. Ce que nous supposerons donc désormais.

**Le théorème de comparaison de Heintze-Karcher.** On va désormais utiliser cette propriété pour préciser le comportement des volumes des voisinages de $D$ en fonction de la courbure ; on va pour cela utiliser les coordonnées exponentielles au voisinage de $\partial D$.

Soit donc l'application $\Phi$ définie par

$$\begin{aligned} \Phi \quad : \quad & \partial D \times \mathbb{R} \to M \\ & (x,t) \mapsto \exp_x(t\nu(x)) \end{aligned}$$

où $\nu(x)$ est la normale à $\partial D$ en $x$.

Pour $x \in \partial D$ fixé, le *lieu de coupure* est le plus grand intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0, sur lequel la géodésique $\Phi(x,t)$ est le plus court chemin entre son extrémité et un point de $\partial D$ (i.e. il n'y a pas d'autre point de $\partial D$ plus proche de $\Phi(x,t)$ que $x$). Le lieu de coupure $C \subset \partial D \times \mathbb{R}$ est la réunion des lieux de coupure pour tous les $x \in \partial D$. C'est un ouvert, et par le théorème de Sard (et l'existence pour tout $y \in M$ de point(s) de $\partial D$ minimisant la distance de $\partial D$ à $y$), son image par $\Phi$ est de mesure pleine. On a alors, d'après la formule du jacobien :

$$\operatorname{vol} D = \int_{(\partial D \times \mathbb{R}_-) \cap C} J(x,t)\, dx\, dt$$

où $J$ est le jacobien de $\Phi$ ; de même, $\operatorname{vol} M \setminus D$ est égal à cette intégrale prise sur $\mathbb{R}_+$ au lieu de $\mathbb{R}_-$.

Avec ces notations, le théorème de comparaison de Heintze-Karcher s'énonce alors :

**Théorème 2 (Heintze-Karcher, [HK78])** – *Supposons que* $\operatorname{Ric} M \geqslant \operatorname{Ric} S^n$*, et que la courbure moyenne de* $\partial D \subset M$ *est constante égale à* $\eta \in \mathbb{R}$*. Alors, pour tout* $x \in \partial D$*, on a* $J(x,t) \leqslant J_\eta(t)$ *où* $J_\eta(t)$ *est le même jacobien* $J$ *calculé pour le bord de la boule géodésique* $B_\eta \subset S^n$ *dont la courbure moyenne dans* $S^n$ *est* $\eta$*.*

Ce théorème est démontré dans la section 3. Nous avons implicitement utilisé la convention $J(x,t) = 0$ pour $(x,t)$ en-dehors du lieu de coupure $C$, et de même pour $J_\eta(t)$ que l'on prend nul pour $t$ supérieur à une certaine valeur dépendant de $\eta$. La boule $B_\eta$ est une calotte très petite pour $\eta$ grand, une demi-sphère pour $\eta = 0$, et la sphère privée d'une petite calotte pour $\eta$ négatif grand (en particulier, $B_\eta$ existe toujours).

**Conclusion.** On sait que la courbure moyenne de $\partial D$ est constante, égale à $\eta$. Soit donc $A \subset S^n$ une boule de même volume relatif que $D$, et $B_\eta \subset S^n$ une boule dont le bord a même courbure moyenne que $\partial D$. On veut montrer que le volume relatif du bord de $D$ est supérieur à celui du bord de $A$ ; l'idée est de comparer les deux au volume du bord de $B_\eta$.

On ne sait pas, de $A$ et de $B_\eta$, lequel a le plus grand volume ; mais, quitte à changer $D$ en $M \setminus D$ (ce qui change les volumes de $A$ et $B_\eta$ en leurs complémentaires, et $\eta$ en $-\eta$, mais qui laisse $\operatorname{vol}_{n-1} \partial A$ et $\operatorname{vol}_{n-1} \partial B_\eta$ inchangés), on peut supposer que $\operatorname{vol} A$ est supérieur à $\operatorname{vol} B_\eta$.

D'après le théorème de Heintze-Karcher, pour tout $x \in \partial D$ on a $J(x,t) \leqslant J_\eta(t)$ qui ne dépend pas de $x$, et donc la relation ci-dessus exprimant le volume de $D$

comme intégrale de $J$ implique

$$\operatorname{vol} D \leqslant \operatorname{vol}_{n-1} \partial D \, . \int_{-\infty}^{0} J_\eta(t)\, dt$$

(toujours avec la convention selon laquelle $J$ est nul en-dehors du lieu de coupure, qui peut être explicité en fonction de $\eta$ par un calcul sur la géométrie des sphères).

Pour les mêmes raisons on a $\operatorname{vol} B_\eta = \operatorname{vol}_{n-1} \partial B_\eta \, . \int_{-\infty}^{0} J_\eta(t)\, dt$ et donc l'inégalité ci-dessus se récrit

$$\frac{\operatorname{vol} D}{\operatorname{vol}_{n-1} \partial D} \leqslant \frac{\operatorname{vol} B_\eta}{\operatorname{vol}_{n-1} \partial B_\eta}$$

sur laquelle on voit bien comment l'hypothèse « courbure de Ricci supérieure à celle de la sphère » se traduit.

Soit $I$ la fonction qui, au volume d'une boule $B \subset S^n$, associe le volume de son bord $\operatorname{vol}_{n-1} \partial B$. On peut calculer $I$ explicitement et vérifier que $I''I = -(n-1) - I'^2/(n-1)$ qui est négatif, et donc $I$ est concave (en fait cette propriété de concavité est vérifiée sur toute variété de courbure de Ricci supérieure à $n-1$) ; en particulier $v \mapsto I(v)/v$ est décroissante. Comme on a pu supposer que le volume de $A$ est supérieur à celui de $B_\eta$ on a donc

$$\frac{\operatorname{vol}_{n-1} \partial A}{\operatorname{vol} A} \leqslant \frac{\operatorname{vol}_{n-1} \partial B_\eta}{\operatorname{vol} B_\eta}$$

et la conclusion suit instantanément de la combinaison des deux inégalités montrées.

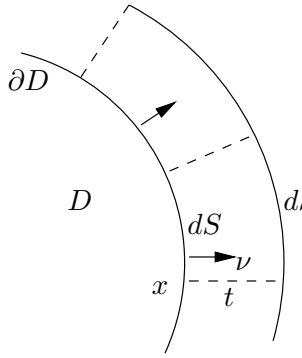
**Retour sur la régularité.** On voit que l'ensemble des points $x \in \partial D$ qui jouent un rôle dans cette démonstration sont ceux pour lesquels il existe au moins un $t \in \mathbb{R}$ tel que $(x,t)$ appartienne au lieu de coupure de $\partial D$ (sinon $x$ n'apparaît pas dans l'intégrale donnant le volume de $D$), c'est-à-dire qu'il existe un $y \in D$ tel que $x$ est le point de $\partial D$ le plus proche de $y$. Imaginons que $\partial D$ ne soit pas régulier en $x$. Soit $C$ le cône tangent en $x$ à $\partial D$. Soit $v$ le vecteur tangent en $x$ pointant vers $y$. Alors $C$ est contenu dans le demi-espace de $T_xM$ opposé à $v$ ; en effet, dans le cas contraire, on pourrait trouver des points de $\partial D$ plus proches de $y$ que $x$, ce qui contredirait l'hypothèse sur $x$.

L'un des résultats d'Almgren dans [Alm76] affirme précisément que si $D$ est un domaine minimisant l'aire du bord à volume fixé, et si $x \in \partial D$ est tel que son cône tangent est contenu dans un demi-espace, alors le bord est lisse au voisinage de $x$. On conclut que le calcul du volume de $D$ se fait en intégrant sur une partie du bord (relativement ouverte) qui est une sous-variété lisse.

## 3 Preuve du théorème de comparaison

Ce théorème est en fait extrêmement naturel si l'on repense à la définition intuitive de la courbure de Ricci que nous avons adoptée en introduction. En effet le jacobien $J(x,t)$ correspond alors au $(n-1)$-volume de la petite surface $S(t)$ obtenue en suivant la normale à $\partial D$ au point $x \in \partial D$. Le volume d'un $t$-voisinage

de $D$ est l'intégrale des $(n-1)$-volumes des « feuilles » $\partial D_t$ obtenues en poussant $\partial D$ perpendiculairement à la normale. Or, le $(n-1)$-volume de $\partial D_t$ est, à l'ordre 0 en $t$, égal à celui de $\partial D$ ; à l'ordre 1 en $t$, le coefficient est précisément, et par définition, la courbure moyenne $\eta$ ; à l'ordre 2 en $t$, le coefficient est lié à la courbure de Ricci comme on le voit sur la définition de cette dernière. Si donc on veut comparer les volumes des voisinages de $D$ dans $M$ avec ceux d'un domaine de $S^n$ de même courbure moyenne $\eta$, il faut donc regarder la courbure de Ricci.




$$dS_t = dS\left(1 + \eta t - \mathrm{Ric}(\nu)\frac{t^2}{2} + O(t^3)\right)$$

Bien sûr, on a besoin d'une estimation pour tout $t$ et non seulement pour $t$ infiniment petit. Afin de prouver que l'inégalité se propage bien, on va donc préciser cette intuition à l'aide de l'étude de la différentielle de l'exponentielle, qui se ramène essentiellement à des variations sur l'équation de Jacobi. La minoration de la courbure de Ricci transformera cela en inéquations différentielles.

On rappelle ce qu'est l'équation de Jacobi (comparer avec la définition de la courbure de Ricci plus haut). Soit $\nu$ un vecteur tangent à $M$ en un point $x$, que l'on prend de norme 1, et soit $(\gamma(t))_t$ la géodésique issue de $\nu$ ; on note $\nu(t) = d\gamma/dt(t)$ le vecteur tangent unitaire à la géodésique en $t$. Soient $e_2, \ldots, e_n$ des vecteurs tangents en $x$ formant avec $\nu$ une base orthonormée. L'équation de Jacobi décrit comment se comportent les géodésiques issues des « extrémités » des $e_i$ dans une direction donnée. Plus précisément, pour tout $t$, soit $Y(t)$ un vecteur tangent au point $\gamma(t)$. Ce champ de vecteurs sur $\gamma$ satisfait l'équation de Jacobi si

$$\nabla_{\nu(t)}\nabla_{\nu(t)}Y(t) = -\mathcal{R}_{\nu(t),Y(t)}\nu(t)$$

qui est une équation différentielle du second ordre en $Y$ (ici $\nabla$ est la dérivée covariante et $\mathcal{R}$ la courbure de Riemann). Cette équation s'interprète en disant que, lorsqu'elle est vérifiée, l'extrémité de $Y(t)$ dessine une géodésique infiniment voisine de $\gamma$. Bien sûr, pour déterminer $Y(t)$, il faut se donner $Y(0)$ ainsi que $\nabla_\nu Y(0)$ qui détermine dans quelle direction part la géodésique.

Ici afin d'étudier la variation des volumes on va prendre une base de géodésiques infiniment voisines. Revenons donc à notre domaine $D$ et supposons que $x \in \partial D$ et que $\nu$ est la normale extérieure à $\partial D$ en $x$.

Soient, pour $2 \leqslant i \leqslant n$, les champs de Jacobi $Y_i(t)$ définis par $Y_i(0) = e_i$, $\nabla_\nu Y_i(0) = \nabla_{e_i}\nu$. Les $Y_i$ décrivent alors les géodésiques normales à $\partial D$ qui sont voisines de la géodésique issue de $\nu$ quand on se déplace infinitésimalement de $e_i$ autour de $x$ ; le choix de $\nabla_\nu Y_i$ est justifié par le fait que le vecteur normal $\nu(x_i)$ en un point $x_i$ infiniment proche de $x$ dans la direction $e_i$ est donné par $\nu(x_i) = \nu(x) + \nabla_{e_i}\nu$.

Soit $e_i(t)$ le transporté parallèle de $e_i$ le long de $\gamma$ ; d'après le lemme de Gauß, $\nu(t)$ et les $e_i(t)$ restent une base orthonormée. Soit $E(t)$ la matrice $(n-1)\times(n-1)$

des composantes des $Y_i(t)$ dans cette base. L'intérêt des $Y_i$ est que l'on a $J(x,t) = \det E(t)$ par construction.

L'équation de Jacobi se récrit $E''(t) + R(t)E(t) = 0$ où la matrice $R(t)$ est donnée par ses entrées $R(t)_{ij} = \langle \mathcal{R}_{\nu(t),e_i}\nu(t)\,,\,e_j\rangle$, qui est symétrique (par l'égalité de Bianchi). Pour se ramener au point base posons (changement de variable classique) $U(t) = E'(t)E(t)^{-1}$ ; l'équation $E'' + RE = 0$ ci-dessus se récrit encore $U' + U^2 + R = 0$ par simple dérivation de $U$. Cette équation différentielle, dite de Ricatti, a le bon goût d'être du premier ordre.

Comme $J(x,t) = \det E(t)$, la dérivée d'un déterminant étant une trace on a $J'(t)/J(t) = \operatorname{tr} U(t)$. En prenant la trace de l'équation différentielle pour $U$ on obtient

$$(\operatorname{tr} U)' + \operatorname{tr} U^2 + \operatorname{tr} R = 0$$

où il est important de remarquer que $\operatorname{tr} R(t) = \mathrm{Ric}(\nu(t))$ par définition (rigoureuse et non intuitive, cette fois) de la courbure de Ricci. Notre hypothèse de minoration de la courbure de Ricci implique donc en particulier $\operatorname{tr} R \geqslant n-1 = \mathrm{Ric}(S^n)$.

Comme $U$ est une matrice symétrique (car $R$ l'est, et d'après l'équation différentielle pour $U$), on a par Cauchy-Schwarz $\operatorname{tr} U^2 \geqslant (\operatorname{tr} U)^2/(n-1)$. On obtient donc l'inéquation différentielle

$$z' + z^2/(n-1) + n - 1 \leqslant 0$$

où on a bien sûr posé $z(t) = \operatorname{tr} U(t)$. De plus, par définition, $z(0)$ est la courbure moyenne $\eta$ de $\partial D$ en $x \in \partial D$.

Par définition de la courbure moyenne $\eta$, on a $z(0) = J'(0)/J(0) = \eta$. Remarquons aussi que l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour $\operatorname{tr} U$ est une égalité si et seulement si $U$ est proportionnel à Id, ce qui est le cas sur la sphère $S^n$. Par conséquent, $z'(t)$, et donc $z(t)$, est toujours inférieur à ce que l'on obtient dans le cas d'égalité sur la sphère en partant d'une boule de courbure moyenne $\eta$ ; ce qui est $J_\eta(t)$ par définition.

Comme $J'/J = z$ et comme $J(0) = J_\eta(0) = 1$, la démonstration est achevée.

## Références


[Alm76] F.J. Almgren Jr., *Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problems with constraints*, Mem. Am. Math. Soc. **4** (1976), No. 165.

[Fed69] H. Federer, *Geometric measure theory*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **153**, Springer (1969), réédition coll. Classics in Mathematics, Springer (1996).

[Gro86] M. Gromov, in V. Milman, G. Schechtman, *Asymptotic theory of finite dimensional normed spaces*, Lecture Notes in Mathematics **1200**, Springer-Verlag, Berlin (1986). PAGES

[HK78] E. Heintze, H. Karcher, *A general comparison theorem with applications to volume estimates for submanifolds*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér., IV, Sér. **11** (1978), 451–470.

[Lév22] P. Lévy, *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Gauthier-Villars, Paris (1922), réédité en 1951 sous le titre *Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle*.