

Diamètre observable des sous-variétés de S^n et $\mathbb{C}P^n$

Yann Ollivier

Novembre 1999

Introduction

Ce texte expose un travail de M. Gromov (cf. [Gro], chapitre 3 $\frac{1}{2}$) sur la notion de diamètre observable et la concentration de la mesure dans des sous-variétés de S^n ou $\mathbb{C}P^n$. Ces considérations prennent place dans le cadre plus général de l'étude des espaces métriques mesurés, et en particulier de l'étude de différentes notions de ce que peut être la convergence d'une suite d'espaces métriques mesurés, et de la recherche d'invariants géométriques naturels pour ces espaces. Le principe général est naturellement de négliger des ensembles de petite mesure.

La notion de diamètre observable découle de celle de concentration de la mesure. Le diamètre observable d'un espace métrique mesuré est la variation maximale d'une fonction lipschitzienne sur cet espace, où l'on s'autorise à ne pas tenir compte de parties de petite mesure où cette fonction est grande. Le diamètre observable sera petit si toute fonction lipschitzienne est très concentrée autour d'une seule valeur.

Ainsi on montre que le diamètre observable de la sphère S^n est de l'ordre de $1/\sqrt{n}$, de même que celui de $\mathbb{C}P^n$. Ceci résulte du fait que pour n grand, presque toute la masse de S^n est concentrée autour de l'équateur. On cherche ensuite à évaluer le diamètre observable de sous-variétés de S^n et de $\mathbb{C}P^n$, à la fois pour la distance induite et pour leur métrique riemannienne propre.

L'idée de concentration de la mesure s'inspire de remarques de Lévy (cf. [Lév]) sur le comportement de la mesure sur une sphère de grande dimension. Un espace de probabilité doté d'une métrique est dit concentré lorsqu'en prenant une partie A de mesure $1/2$, on constate que les points situés à une

distance inférieure à ε de A contiennent presque toute la masse de l'espace.

Formellement, la concentration d'un espace de probabilité (X, μ) est ainsi définie par la décroissance de la quantité $\sup \{\mu(x \setminus A_\varepsilon), \mu(A) = 1/2\}$, en fonction de ε , avec $A_\varepsilon = \{x \in X, \text{dist}(x, A) \leq \varepsilon\}$. Souvent, on constate que cette quantité décroît comme l'exponentielle de ε^2 . C'est le cas sur la sphère S^n , où la mesure est concentrée comme $e^{-n\varepsilon^2/2}$ autour de l'équateur, mais aussi par exemple dans l'espace $\{0, 1\}^n$ ou bien dans un produit d'espaces de probabilité identiques. Voir [Tal].

Concentration et diamètre observable sont directement liés. En effet, si f est une fonction lipschitzienne sur un espace concentré, les points où f est inférieure à sa médiane forment un ensemble de mesure $\geq 1/2$, et par conséquent une grande partie de la masse de l'espace est située à distance inférieure à ε d'un point où f est égale à sa médiane. Comme f est lipschitzienne, f sera proche de sa médiane sur une grande partie de l'espace.

1 Concentration sur la sphère

Cette section décrit le phénomène de concentration de la mesure de la sphère S^n de grande dimension autour de son équateur, et montre ensuite comment cela mène à la concentration des fonctions lipschitziennes sur la sphère autour de leur valeur médiane. Ces observations amènent naturellement à la notion de diamètre observable étudiée ensuite.

1.1 Concentration de la mesure sur la sphère

On s'intéresse à la répartition de la mesure sur la sphère S^n pour n grand. Il se trouve que cette mesure est très fortement concentrée autour de l'équateur.

On mesure cette concentration par la quantité

$$\kappa_n(\varepsilon) = \frac{\int_\varepsilon^{\pi/2} (\cos t)^{n-1} dt}{\int_0^{\pi/2} (\cos t)^{n-1} dt}$$

qui est la portion de mesure de la sphère de latitude $\geq \varepsilon$.

On montre (cf. annexe D) que

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} (\varepsilon\sqrt{n}) (1 - 2\varepsilon^2)^n \leq \kappa_{n+1}(\varepsilon) \leq e^{-n\varepsilon^2/2} + o(1)$$

Cette quantité est en $O(1)$ pour $\varepsilon \approx 1/\sqrt{n}$. Si $\varepsilon = \lambda/\sqrt{n}$, on a plus précisément :

$$\kappa_{n+1} \left(\frac{\lambda}{\sqrt{n}} \right) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\lambda}^{\infty} e^{-t^2/2} dt$$

En normalisant, cela signifie que sur la sphère S^n de rayon \sqrt{n} , la loi de la distance à l'équateur (ou, de manière équivalente, la loi d'une fonction coordonnée) converge vers une gaussienne d'écart-type 1. De même, sur cette sphère, la loi des k premières coordonnées, k fixé, tend vers une gaussienne lorsque n est grand.

Corollairement, deux points quelconques de la sphère S^n sont presque sûrement à distance très proche de $\pi/2$ l'un de l'autre (placer le premier point au pôle : les autres sont concentrés autour de l'équateur).

1.2 Concentration des fonctions lipschitziennes sur la sphère

La *médiane* d'une mesure finie μ sur \mathbb{R} est définie comme l'unique $a \in \mathbb{R}$ tel que $\mu(-\infty; a] \geq \mu(\mathbb{R})/2$ et $\mu([a; \infty) \geq \mu(\mathbb{R})/2$. Si le support de μ n'est pas connexe, il se peut que le a vérifiant cette propriété ne soit pas unique, auquel cas on prend comme définition de la médiane le milieu de l'intervalle des a vérifiant cette propriété.

La médiane d'une fonction f d'un espace mesuré (X, μ) vers \mathbb{R} sera la médiane de $f_*\mu$.

Le théorème de concentration des fonctions lipschitziennes sur la sphère affirme que si f est une fonction 1-lipschitzienne de S^n dans \mathbb{R} , et m la médiane de f , alors f est très concentrée autour de m :

$$\mu(\{x \in S^n, |f(x) - m| \geq \varepsilon\}) \leq \kappa_n(\varepsilon)$$

où κ_n est le même que ci-dessus, et μ est la mesure normalisée sur la sphère.

L'élément principal de la démonstration est l'inégalité isopérimétrique sur la sphère. Sous une de ses formes, elle affirme que si A est une partie mesurable de S^n , et B une calotte de S^n de même mesure que A , alors la mesure du ε -voisinage $A_\varepsilon = \{x \in S^n, \text{dist}(x, A) \leq \varepsilon\}$ est supérieure à la mesure du ε -voisinage de la calotte B . Une démonstration très simple peut être trouvée dans [FLM], à partir de l'idée de symétrisation : si A n'est pas une calotte, on peut rendre A un peu plus symétrique en diminuant la mesure du ε -voisinage.

Démonstration . Soit $\Sigma = f^{-1}([-\infty; m])$. On a $\mu(\Sigma) \geq 1/2$. Si on est dans le cas $\mu(\Sigma) > 1/2$ (i.e. $\mu(f^{-1}(\{m\})) > 0$), on retire de Σ une partie de $f^{-1}(\{m\})$ de manière à obtenir $\mu(\Sigma) = 1/2$. Soit $\Sigma_\varepsilon = \{x \in S^n, 0 < \text{dist}(x, \Sigma) \leq \varepsilon\}$. L'inégalité isopérimétrique sur la sphère donne alors que la mesure de Σ_ε est supérieure à la mesure du ε -voisinage d'une boule de S^n de même mesure que Σ . Comme $\mu(\Sigma) = 1/2$, cette boule est une moitié de S^n , et la mesure de son ε -voisinage est $1/2 - \kappa_n(\varepsilon)/2$. Comme f est 1-Lipschitzienne, on a $f(\Sigma_\varepsilon) \subset [m - \varepsilon; m + \varepsilon]$. En recommençant avec le complémentaire de Σ , on obtient le résultat désiré. \square

Inversement, en tenant compte de l'inégalité $\kappa_n(\varepsilon) \leq 2e^{-(n-1)\varepsilon^2/2}$, cela signifie que si l'on a deux parties de la sphère de mesure $\geq \kappa$, leur distance est forcément inférieure à $3/\sqrt{n} \sqrt{-\log \kappa/2}$ (considérer la fonction lipschitzienne « distance à l'une des deux parties »).

2 Diamètre observable

Soient (X, d, μ) un mm-espace et κ un nombre inférieur à 1.

Le *diamètre partiel* $\text{diam}(X, \mu, \kappa)$ est le plus petit $D \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $Y \subset X$ avec $\text{diam} Y = D$ et $\mu(Y) \geq \mu(X)(1 - \kappa)$. C'est le plus petit diamètre qu'on peut obtenir en laissant de côté une partie κ de la mesure..

Ensuite, le *diamètre observable* de X vers Y , noté $\text{diam}\left(X \xrightarrow{\text{Lip}_1} Y, \kappa\right)$, est le sup pour f fonction 1-lipschitzienne de X vers Y , du diamètre $\text{diam}(Y, f_*\mu, \kappa)$. C'est le diamètre qu'on peut obtenir lorsqu'on regarde X au travers d'une fonction à valeurs dans Y , en laissant de côté une partie κ de la mesure.

On notera plus simplement $\text{ObsDiam}(X, \kappa)$ le diamètre observable de X vers \mathbb{R} .

Si $Y \subset X$, comme toute fonction 1-lipschitzienne sur Y peut être prolongée à X (par induction transfinie, théorème de Kirshbraun), on a la propriété $\text{ObsDiam}\left(Y, \kappa \frac{\mu(X)}{\mu(Y)}\right) \leq \text{ObsDiam}(X, \kappa)$

On va voir que bien que le diamètre partiel de S^n soit de l'ordre de π , son diamètre observable à valeurs dans \mathbb{R} tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Une autre définition géométrique dont on aura besoin est la suivante : la *distance de séparation* de X pour deux nombres κ_1, κ_2 est $\text{sep}(X, \kappa_1, \kappa_2) = \sup \text{dist}(Y_1, Y_2)$ pour deux sous-ensembles $Y_1, Y_2 \subset X$ tels que $\mu(Y_i) \geq \kappa_i \mu(X)$.

Le diamètre observable est étroitement lié à la distance de séparation. Plus exactement, on a :

$$\text{ObsDiam}(X, 2\kappa) \leq \text{sep}(X, \kappa, \kappa) \leq \text{ObsDiam}(X, \kappa)$$

Démonstration . Premièrement, supposons $\text{sep}(X, \kappa, \kappa) = D$. On veut montrer que $\text{ObsDiam}(X, 2\kappa) \leq D$. Prenons une fonction f 1-lipschitzienne sur X à valeurs dans \mathbb{R} . Soit μ_* le repoussé sur \mathbb{R} de la mesure sur X . Soient $a = \inf \{x \in \mathbb{R}, \mu_*(]-\infty; x]) \geq \kappa\mu(X)\}$ et $b = \sup \{x \in \mathbb{R}, \mu_*([x; \infty[) \geq \kappa\mu(X)\}$. Alors $f^{-1}(]-\infty; a])$ et $f^{-1}([b; \infty[)$ sont deux parties de X de mesure $\geq \kappa\mu(X)$. Comme $\text{sep}(X, \kappa, \kappa) = D$, la distance entre ces deux ensembles est inférieure à D . Comme f est lipschitzienne, on a $b - a \leq D$. Donc $\text{diam}(\mathbb{R}, \mu_*, 2\kappa) \leq D$. Deuxièmement, supposons encore $\text{sep}(X, \kappa, \kappa) = D$. On va construire une fonction 1-lipschitzienne sur X de diamètre partiel $\geq D - \varepsilon$. Soient $Y_1, Y_2 \subset X$ de mesure $\geq \kappa\mu(X)$, tels que $\text{dist}(Y_1, Y_2) = D - \varepsilon$. On pose $f : X \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \text{dist}(x, Y_1)$. f est positive, vaut 0 sur un ensemble de mesure $\geq \kappa\mu(X)$, et est plus grande que $D - \varepsilon$ sur un ensemble de mesure $\geq \kappa\mu(X)$. Le diamètre $\text{diam}(\mathbb{R}, f_*\mu, \kappa)$ est alors plus grand que $D - \varepsilon$. \square

Enfin, voici une autre propriété utile : si $f : X \rightarrow Y$ est une application 1-lipschitzienne qui envoie la mesure de X sur la mesure de Y , alors $\text{ObsDiam}(Y, \kappa) \leq \text{ObsDiam}(X, \kappa)$.

Démonstration . Soit g une fonction réelle 1-lipschitzienne sur Y . Par hypothèse, $\text{diam}(\mathbb{R}, g_*\mu_Y, \kappa) = \text{diam}(\mathbb{R}, (g \circ f)_*\mu_X, \kappa)$. Or $g \circ f$ est une fonction 1-lipschitzienne sur X , donc $\text{diam}(\mathbb{R}, (g \circ f)_*\mu_X, \kappa) \leq \text{ObsDiam}(X, \kappa)$. \square

3 Diamètre observable des sous-variétés de S^n

3.1 Diamètre observable de S^n

Pour commencer, évaluons le diamètre observable de la sphère S^n . On part de $\text{ObsDiam}(S^n, \kappa) \leq \text{sep}(S^n, \kappa/2, \kappa/2)$. Si on place les deux ensembles de masse $\kappa/2$ autour des deux pôles de S^n , le diamètre obtenu en négligeant ces deux ensembles est $2R$, où R est tel que $\kappa_\varepsilon(R) = \kappa/2$. Comme $\kappa_n(r) \leq 2e^{-(n-1)r^2/2}$, on a :

$$\text{ObsDiam}(S^n, \kappa) \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}} \sqrt{-\log(\kappa/4)}$$

Par la suite, nous utiliserons souvent cette évaluation.

3.2 Le cas des sous-variétés de S^n

On se place dans S^n . On considère une sous-variété X de codimension $k \geq 1$. On s'intéresse au diamètre observable de X . On suppose que X vérifie les hypothèses suivantes :

1) Si S^k est une sphère équatoriale de S^n , alors $X \cap S^k$ contient au plus d points (si l'intersection est transverse).

2) $\text{vol}_{n-k} X \geq c \text{vol} S^{n-k}$

La première condition est analogue à une condition de degré borné dans le cas d'une variété algébrique.

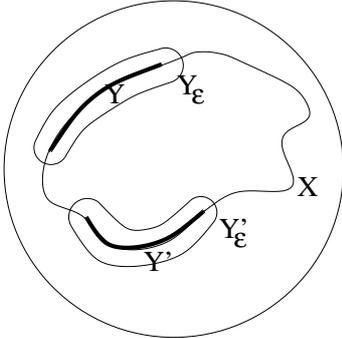
La formule de Crofton (cf. annexe A.1) s'écrit :

$$\int_{S^k \subset S^n} \#(S^k \cap X) dS^k = \frac{2 \text{vol}_{n-k} X}{\text{vol} S^{n-k}}$$

d'où l'on déduit déjà la relation $d \geq 2c$.

Le but de cette section est de majorer le diamètre observable de X pour la distance induite par S^n , et pour la mesure vol_{n-k} sur X .

Le principe du raisonnement est le suivant : on utilise le fait que $\text{ObsDiam}(X, 2\kappa) \leq \text{sep}(X, \kappa, \kappa)$. On cherche donc à majorer la distance entre deux sous-ensembles de X de mesure relative κ . Pour cela on va considérer les ε -voisinages de ces deux ensembles, qui sont dans S^n . On va évaluer leur mesure dans S^n , puis évaluer leur distance à partir de $\text{sep}(S^n)$ qui est connu. De plus, la différence entre les distances de deux ensembles et la distance de leurs ε -voisinages est inférieure à 2ε .



Par conséquent, si le ε -voisinage de tout ensemble de mesure relative κ dans X a une mesure $\geq \kappa_\varepsilon$, on aura $\text{sep}(X, \kappa, \kappa) \leq \text{sep}(S^n, \kappa_\varepsilon, \kappa_\varepsilon) + 2\varepsilon$.

Soit Y une partie de X de volume $\text{vol}_{n-k} Y = \kappa \text{vol}_{n-k} X$. On va donc chercher à minorer la mesure du voisinage Y_ε de Y dans S^n .

On note μ_i la mesure standard normalisée sur S^i . La formule de Crofton donne, compte tenu de ces normalisations :

$$\mu_n(Y_\varepsilon) = \int_{S^k \subset S^n} \mu_k(S^k \cap Y_\varepsilon) dS^k$$

Or toute sphère S^k rencontrant Y rencontre aussi Y_ε , et l'intersection contient une boule de rayon ε dans S^k . Si $b(k, \varepsilon)$ est le volume de la boule de rayon ε dans S^k , on a donc

$$\int_{S^k \subset S^n} \mu_k(S^k \cap Y_\varepsilon) dS^k \geq \int_{S^k \subset S^n} b(k, \varepsilon) dS^k$$

Alors :

$$\begin{aligned} \mu_n(Y_\varepsilon) &\geq \int_{S^k \subset S^n} b(k, \varepsilon) dS^k \\ &\geq b(k, \varepsilon) \frac{1}{d} \int_{S^k \subset S^n} \#(S^k \cap Y) dS^k \\ &= \frac{2 \operatorname{vol}_{n-k} Y}{\operatorname{vol}_{n-k} S^{n-k}} b(k, \varepsilon) \\ &= 2 \frac{c}{d} \kappa b(k, \varepsilon) \end{aligned}$$

On notera $\kappa_\varepsilon = 2 \frac{c}{d} \kappa b(k, \varepsilon)$.

Repartons de $\operatorname{ObsDiam}(X, 2\kappa) \leq \operatorname{sep}(X, \kappa, \kappa) \leq \operatorname{sep}(S^n, \kappa_\varepsilon, \kappa_\varepsilon) + 2\varepsilon$.

Maintenant, $\operatorname{sep}(S^n, \kappa_\varepsilon, \kappa_\varepsilon) \leq \operatorname{ObsDiam}(S^n, \kappa_\varepsilon) \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}} \sqrt{-\log(\kappa_\varepsilon/2)} \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}} \sqrt{-\log\left(\frac{c}{d} \kappa b(k, \varepsilon)\right)}$.

Évaluons : $b(k, \varepsilon) = \frac{\int_0^\varepsilon (\sin t)^{k-1} dt}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos t)^{k-1} dt}$. Or $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos t)^{k-1} dt \leq \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{k-1}}$ et $\int_0^\varepsilon (\sin t)^{k-1} dt \geq \frac{1}{k} (\varepsilon/3)^k$, d'où $b(k, \varepsilon) \geq \frac{1}{5\sqrt{k}} (\varepsilon/3)^k$.

On a donc au final, pour tout $\varepsilon (\leq \pi/2)$, que

$$\operatorname{ObsDiam}(X, 2\kappa) \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}} \sqrt{-\log\left(\frac{c}{d} \kappa \frac{1}{5\sqrt{k}} (\varepsilon/3)^k\right)} + 2\varepsilon$$

Reste à choisir ε . On obtient une bonne inégalité pour $\varepsilon \approx \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}}$, ou mieux pour $\varepsilon \approx \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n \log n}}$. Ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\text{ObsDiam}(X, 2\kappa) &\leq \frac{3\sqrt{k}}{\sqrt{n}} \left(\frac{3}{\sqrt{\log n}} + \sqrt{-\log \left(\left(\frac{c}{d} \kappa \frac{1}{\sqrt{k}} \right)^{2/k} \frac{k}{n \log n} \right)} \right) \\
&\leq \frac{4\sqrt{k}}{\sqrt{n}} \sqrt{-\log \left(\left(\frac{c}{d} \kappa \right)^{2/k} \frac{k}{n} \right)}
\end{aligned}$$

pour n assez grand.

4 Diamètre observable des sous-variétés algébriques de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$

On s'intéresse désormais à une sous-variété algébrique X de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. On peut étudier le diamètre observable de X pour la distance dist induite par $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, i.e. $\text{dist}(x \in X, y \in X) = \text{dist}(x \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n, y \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n)$, ou pour la métrique riemannienne dist_X sur X (problème plus ardu).

Pour le cas de la distance induite, les méthodes utilisées dans S^n se transposent directement. Ensuite, pour étudier le cas de la métrique dist_X , on utilise une majoration de dist_X par dist obtenue en approximant X par un sous-espace projectif $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$ de même dimension que X . Ces méthodes utilisent des propriétés spécifiques aux variétés algébriques complexes et ne semblent pas directement transposables au cas de S^n .

4.1 Le cas de la distance induite sur X par $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$

Peu de choses changent par rapport au cas de S^n . On considère une sous-variété X de codimension complexe k . On s'intéresse au diamètre observable de X pour la distance induite par la métrique usuelle sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, X étant muni de la mesure usuelle vol_{2n-2k} . On suppose cette fois que X vérifie les hypothèses suivantes :

- 1) X est de degré d (cf. la condition 1 ci-dessus dans S^n).
- 2) $\text{vol}_{2n-2k} X = c \text{vol}_{2n-2k} \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-k}$

Le théorème de Wirtinger donne immédiatement $c = d$.

Le raisonnement effectué ci-dessus pour S^n se transpose littéralement au cas de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Dans le cas complexe, la formule de Crofton ne fait pas apparaître

le coefficient 2 (car deux plans projectifs de dimensions complémentaires se rencontrent en un point, contrairement au cas de deux sphères).

On a de la même manière $\text{ObsDiam}(X, 2\kappa) \leq \text{ObsDiam}(\mathbb{CP}^n, \kappa_\varepsilon) + 2\varepsilon$, avec $\kappa_\varepsilon = \kappa b(2k, \varepsilon)$

Pour évaluer $\text{ObsDiam}(\mathbb{CP}^n, \kappa_\varepsilon)$, on va utiliser l'application canonique $S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{CP}^n, (x_0, \dots, x_{2n+1}) \mapsto (x_0 + ix_1 : \dots : x_{2n} + ix_{2n+1})$. C'est une application 1-lipschitzienne qui envoie la mesure canonique (normalisée) sur S^{2n+1} sur la mesure canonique sur \mathbb{CP}^n . Par conséquent, $\text{ObsDiam}(\mathbb{CP}^n, \kappa_\varepsilon) \leq \text{ObsDiam}(S^{2n+1}, \kappa_\varepsilon)$.

Ce qui donne l'évaluation finale :

$$\begin{aligned} \text{ObsDiam}(X, \kappa) &\leq \frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{n}} \left(\frac{2}{\sqrt{\log n}} + \sqrt{-\log \left(\left(\frac{\kappa}{\sqrt{k}} \right)^{1/k} \frac{k}{n \log n} \right)} \right) \\ &\leq \frac{4\sqrt{k}}{\sqrt{n}} \sqrt{-\log \left(\kappa^{1/k} \frac{k}{n} \right)} \end{aligned}$$

pour n assez grand.

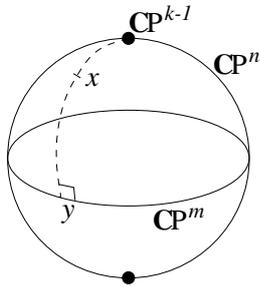
4.2 Le cas de la métrique riemannienne sur X

Soit encore X une sous-variété algébrique de \mathbb{CP}^n , de codimension k et de degré d . Notons $m = \dim_{\mathbb{C}} X = n - k$.

Soit dist_X la métrique riemannienne sur X . On note toujours dist la distance induite par la distance de \mathbb{CP}^n . On a évidemment $\text{dist} \leq \text{dist}_X$.

On s'intéresse au diamètre observable de X pour la distance dist_X (et toujours pour la mesure de volume vol_{2m}).

L'idée est de comparer X à un sous-espace projectif \mathbb{CP}^m . Soit \mathbb{CP}^m un sous-espace projectif issu de $\mathbb{C}^{m+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$, et \mathbb{CP}^{k-1} le sous-espace projectif issu de $\mathbb{C}^k \subset \mathbb{C}^{n+1}$ où \mathbb{C}^k est orthogonal à \mathbb{C}^{m+1} (où $k = n - m$). On dira que \mathbb{CP}^m et \mathbb{CP}^{k-1} sont deux sous-espaces *opposés*. Par chaque point de $x \in \mathbb{CP}^n$, $x \notin \mathbb{CP}^{k-1}$, il passe un unique k -espace projectif L contenant \mathbb{CP}^{k-1} . L intersecte \mathbb{CP}^m en un unique point y . y sera appelé la *projection orthogonale* de x sur \mathbb{CP}^m , et \mathbb{CP}^{k-1} (qui est déterminé par \mathbb{CP}^m) sera le *centre* de la projection. Dessin pour \mathbb{CP}^2 et $m = 1$ (on ne dessine bien sûr que les parties réelles $\mathbb{RP}^k \subset \mathbb{CP}^k$, et on rend \mathbb{RP}^2 par la sphère, où les points opposés doivent être identifiés) :



On va projeter X sur un $\mathbb{C}P^m$ bien choisi. Ensuite, pour évaluer le diamètre observable, on essaiera de contrôler dist_X en fonction de la distance sur $\mathbb{C}P^m$. Plus exactement, on se restreindra pour cela à une partie $\Sigma \subset X$, et on montrera ensuite qu'un petit voisinage de Σ contient presque toute la mesure de X .

Notons déjà que la projection n'envoie qu'un nombre fini de points, inférieur ou égal à d , sur un point donné de $\mathbb{C}P^m$ (théorème de Bézout). En particulier, X ne contient aucun segment d'une droite projective complexe passant par le centre.

4.2.1 Choix du centre de projection

Bien sûr, si X et le centre de la projection $\mathbb{C}P^k$ sont proches (voire s'intersectent), la projection augmente considérablement les distances. On souhaite donc que le centre de la projection soit éloigné de X , ce qui revient à dire que le sous-espace $\mathbb{C}P^m$ sur lequel on projette approxime bien X .

Théorème . *Pour tout $r < k = \text{codim } X$, on peut trouver un r -espace $\mathbb{C}P^r \subset \mathbb{C}P^n$ tel que la distance entre X et $\mathbb{C}P^r$ est plus grande que $1/(20d)^{r+1}$ où $d = \text{deg } X$.*

Démonstration . Prenons d'abord $k = 1$ et $r = 0$. Prenons une carte affine \mathbb{C}^n de $\mathbb{C}P^n$ en un point quelconque. X y est l'ensemble des zéros d'un polynôme. Dans $B(0, 1) \subset \mathbb{C}^n$, il y a donc un point distant de plus de $1/(4d)$ de X (cf. annexe B). Sur $B(0, 1) \subset \mathbb{C}^n$, la métrique de \mathbb{C}^n et celle provenant de $\mathbb{C}P^n$ diffèrent au plus d'un facteur 2, donc le point ainsi obtenu est distant d'au moins $1/(8d)$ de X dans $\mathbb{C}P^n$.

Passons à $r = 0$, k quelconque. Une variété X de codimension k et de degré d est toujours incluse dans une hypersurface de degré d (par exemple, prendre un $\mathbb{C}P^{k-2}$ ne rencontrant pas la variété et considérer l'hypersurface « cône sur X de centre $\mathbb{C}P^{k-2}$ » formée par tous les $\mathbb{C}P^{k-1}$ contenant le $\mathbb{C}P^{k-2}$ et rencontrant X : c'est une hypersurface de même degré que X).

En appliquant le cas précédent, on trouve donc un point qui est à distance $\leq 1/(8d)$ d'une des hypersurfaces, et a fortiori de l'intersection X .

Ensuite, on raisonne par récurrence sur r . Prenons un point $c \in \mathbb{C}P^n$ à distance $1/(8d)$ de X . On projette X sur le $\mathbb{C}P^{n-1}$ opposé à c . La projection de X est une sous-variété de $\mathbb{C}P^{n-1}$ de degré d et de codimension $k-1$. Par hypothèse de récurrence, on peut donc trouver un $\mathbb{C}P^{r-1} \subset \mathbb{C}P^{n-1}$ qui est à distance au moins $1/(20d)^r$ de la projection de X . On considère ensuite l'espace projectif E de dimension r engendré par ce $\mathbb{C}P^{r-1}$ et le centre de projection c .

Soient donc $x \in X$ et $y \in E$. On veut montrer que $\text{dist}(x, y) \geq 1/(20d)^{r+1}$. Soit D la géodésique joignant x à y (segment de droite projective réelle). Soient C_1 l'ensemble des points à distance de c inférieure à $1/(8d)$, et C_2 l'ensemble des points à distance de c inférieure à $1/(16d)$.

Par construction, on a $x \notin C_1$. Si, partant de x , D rentre dans C_2 , sa longueur est donc plus grande que $1/(16d)$ qui est lui-même plus grand que $1/(20d)^{r+1}$ comme souhaité. Sinon, D reste à l'extérieur de C_2 . Or (cf. annexe C.2), à l'extérieur de C_2 , la projection dilate les distances d'un facteur au plus $1/\sin(1/(16d)) \leq 20d$. Mais la projection de D est une géodésique joignant $p(x)$ à un point de l'espace projectif construit par récurrence, et a donc une longueur $\geq 1/(20d)^{r+1}$ par hypothèse de récurrence. Cela montre que la longueur de D est $\geq 1/(20d)^{r+1}$. \square

Prenant $r = k-1$, on choisit ainsi pour la suite comme centre de projection un $\mathbb{C}P^{k-1}$ à distance plus grande que $1/(20d)^k$ de X , et on note $\mathbb{C}P^m$ le sous-espace projectif opposé, sur lequel on va projeter X .

4.2.2 Définition des distances en jeu

Outre la distance dist sur $\mathbb{C}P^n$ et la distance dist_X sur X , on va utiliser deux distances auxiliaires sur X , définies à partir de la projection de X sur $\mathbb{C}P^m$.

Si d est une distance sur un certain espace, on appellera *distance par chemins résultant de d* la distance (éventuellement parfois infinie) définie par :

$$d_c(x, y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}) \text{ où } x_0 = x, x_n = y \text{ et où } d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon \right\}$$

la limite étant croissante.

- Soit p la projection de X sur $\mathbb{C}P^m$. On utilisera les « distances » suivantes.
- dist , la métrique riemannienne usuelle sur $\mathbb{C}P^n$, qui peut se restreindre à X et à $\mathbb{C}P^m$.
 - dist_X , la métrique riemannienne sur X issue de dist , qui est aussi la distance par chemins résultant de dist .
 - dist_p , « distance » sur X définie par $\text{dist}_p(x, y) = \text{dist}(p(x), p(y))$.
 - dist_{pc} , distance par chemins sur X provenant de dist_p . C'est une vraie distance, et même une métrique riemannienne (dégénérée en certains points), égale au rappel sur X par p de la métrique riemannienne sur $\mathbb{C}P^m$.

Le déroulement de la démonstration sera le suivant : on va majorer dist_p par dist ; puis on va montrer que sur un sous-ensemble Σ de X , on a $\text{dist}_p = \text{dist}_{pc}$; ensuite on majorera dist_X par dist_{pc} , ce qui donnera une majoration de dist_X par dist valable sur Σ . Enfin on évaluera le diamètre observable de X grâce à cette majoration, en ayant auparavant montré que Σ est assez grand pour cela.

4.2.3 Majoration de dist_p par dist

Soient x et y deux points de X . On cherche à évaluer le sort que la projection sur $\mathbb{C}P^m$ fait subir à $\text{dist}(x, y)$, qui risque d'augmenter si x et y sont proches du centre de projection.

Théorème . *Soit $a \geq 1/(20d)^k$ la distance à X du centre de projection. Alors sur X :*

$$\text{dist}_p \leq \frac{\pi}{a} \text{dist}_X$$

Démonstration . La distance entre $p(x)$ et $p(y)$ est inférieure à la longueur du projeté de la géodésique joignant x à y dans $\mathbb{C}P^n$.

Soient C_1 l'ensemble des points dont la distance au centre est inférieure à a et C_2 l'ensemble des points dont la distance au centre est inférieure à $a/2$.

La géodésique D entre $x \notin C_1$ et $y \notin C_1$ est un segment de droite projective réelle, et peut très bien passer dans C_1 et même rencontrer le centre de projection. On découpe D en un morceau D_1 extérieur à C_1 , et un morceau D_2 intérieur à C_1 .

En dehors de C_1 , la projection dilate les distances d'un facteur au plus $1/\sin a$ (cf. annexe C.2). Par conséquent, la longueur du projeté de D_1 est inférieure à $1/\sin a$ fois la longueur de D_1 .

Considérons maintenant D_2 . Soit sa longueur est $\leq a$, et alors elle est trop courte pour rentrer dans C_2 , et reste dans $C_1 \setminus C_2$ où la dilatation est $\leq 1/\sin(a/2)$. Soit elle est plus longue que a . On majore alors grossièrement la longueur de son projeté par π qui est la longueur d'une droite projective réelle; dans ce cas, la dilatation de la longueur de D_2 est inférieure à π/a . (On traite exactement de cette manière le cas, qui n'est en fait qu'un cas limite, où D rencontre le centre de projection, cas où le projeté de D est mal défini.)

Dans tous les cas, le coefficient de dilatation est inférieur à π/a . \square

4.2.4 Relations entre dist_p et dist_{pc}

Comme dist_{pc} est la distance par chemins obtenue à partir de dist_p , on a de toute évidence :

Théorème .

$$\text{dist}_p \leq \text{dist}_{pc}$$

Soit Σ_p l'ensemble des points de $\mathbb{C}P^m$ n'ayant qu'un seul antécédent par p dans X , et $\Sigma \subset X$ l'ensemble des antécédents de ces points (c'est l'ensemble des points de X où p est localement de degré d).

On va voir que l'inégalité ci-dessus est une égalité dès que l'un des deux points est dans Σ .

Théorème . Soient $x \in X$ et $y \in \Sigma$. Alors

$$\text{dist}_{pc}(x, y) = \text{dist}_p(x, y)$$

Démonstration . Soit a la géodésique joignant $p(x)$ à $p(y)$ dans $\mathbb{C}P^m$. On va d'abord montrer qu'on peut relever a dans X . On se réduit à des variétés de dimension 1 en considérant la droite projective complexe $L \subset \mathbb{C}P^m$ engendrée par $p(x)$ et $p(y)$, qui contient l'arc a , et en se restreignant à $X \cap p^{-1}(L)$ qui est une variété complexe de dimension 1 (car X ne contient aucun segment d'une droite projective complexe passant par le centre). Soit X' une composante irréductible de $X \cap p^{-1}(L)$. Au voisinage de tout point de X' , par un changement de variable holomorphe, on peut ramener p à $z \mapsto z^r$ dans \mathbb{C} , avec $1 \leq r \leq d$. Or pour l'application $z \mapsto z^r$, il est possible de relever les chemins (on obtient des chemins différentiables par morceaux avec rupture en 0 pour $r > 1$), de manière éventuellement non unique. Par conséquent,

sur X qui est réunion de ses composantes irréductibles, on peut aussi relever les chemins.

Soit $A \subset X$ un relevé du chemin a , partant de x . Le chemin A aboutit à un point de $p^{-1}(p(y))$, mais comme $y \in \Sigma$, le chemin A aboutit exactement en y . Dans $\mathbb{C}P^m$, on a $\text{dist}(p(x), p(y)) = \ell(a)$ où ℓ désigne la longueur d'un arc. Par définition de dist_{pc} , on a $\ell_{\text{dist}_{pc}}(A) = \ell_{\text{dist}}(a)$, et on a évidemment $\text{dist}_{pc}(x, y) \leq \ell_{\text{dist}_{pc}}(A)$. Donc $\text{dist}_{pc}(x, y) \leq \text{dist}_p(x, y)$. \square

4.2.5 Relations entre dist_{pc} et dist_X

Théorème . *Soit $a \geq 1/(20d)^k$ la distance à X du centre de projection. Alors sur X :*

$$\text{dist}_{pc} \leq \frac{2}{a} \text{dist}_X$$

Démonstration . La démonstration est beaucoup plus simple que celle donnée ci-dessus du théorème équivalent pour dist_p et $\text{dist}_{|X}$. En effet, comme on a affaire à des distances par chemins (à des métriques riemanniennes éventuellement dégénérées), on ne sort pas de X et donc on ne s'approche pas de plus de a du centre de projection.

Soient $x, y \in X$. Soit A une plus courte géodésique dans X joignant x à y . D'après le résultat mentionné en annexe C.2, la longueur $\ell(a)$ du projeté a de A est inférieure à $(1/\sin a) \ell(A)$. a étant une courbe de $\mathbb{C}P^m$ joignant $p(x)$ à $p(y)$, on a $\text{dist}_p(x, y) = \text{dist}(p(x), p(y)) \leq \ell(a)$. \square

Théorème . *On a $\text{dist}_X \leq \rho(\text{dist}_{pc})$ pour une fonction ρ tendant vers 0 en 0.*

Démonstration . Ceci car dist_X et dist_{pc} sont deux distances équivalentes sur X qui est compact. \square

On cherche une évaluation plus précise de ρ . On va montrer que :

Théorème . $\text{dist}_X \leq C_1 C_2^k k d^{2k+2} (\text{dist}_{pc})^{1/d}$ pour des constantes $C_1 \leq 10000$, $C_2 \leq 1000$.

Il s'agit de comparer la longueur d'un arc dans $\mathbb{C}P^m$ (qui est la longueur pour dist_{pc} de son relevé dans X) et de son relevé dans X . D'abord, remarquons que le coefficient $(\text{dist}_{pc})^{1/d}$ est correct, car en certains points la projection est de degré d ($z \mapsto z^d \in \mathbb{C}$ localement).

Le principe de l'argument est le suivant : si en un certain point, X est très vertical (par « vertical » on entend proche de la direction de projection sur

une certaine distance), alors on peut montrer que globalement, il sera aussi très vertical et passera très près du centre de la projection. La distance au centre de projection étant contrôlée, on contrôle ainsi la verticalité maximale de X . (Notons que généralement, il y a des points où l'espace tangent à X est vertical; mais on veut éviter que X soit proche de la verticale sur une trop grande distance.)

Le passage de la verticalité locale à la verticalité globale utilise fortement les propriétés des polynômes complexes mentionnées en annexe B.

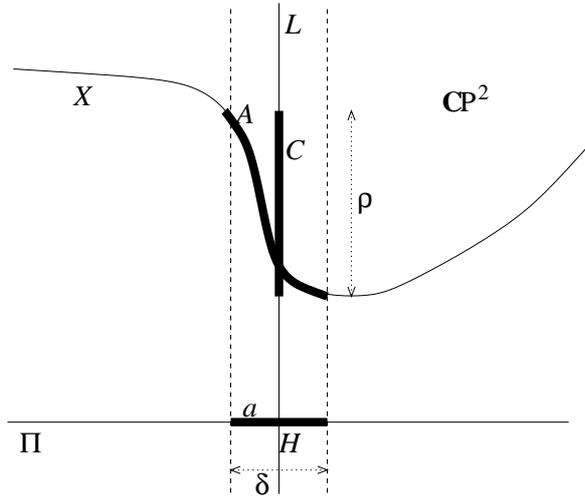
Démonstration . On considère d'abord le cas $k = 1$ où le centre de projection est un point c_0 .

Soit $a \subset \mathbb{CP}^m$ un arc de longueur δ et A un relevé de a dans X . On veut évaluer la longueur de A . Ce sont les petits δ qui posent problème; on prendra $\delta < \pi/8$.

Tout se passe dans \mathbb{CP}^2 : en effet, a étant un segment de droite projective réelle, est inclus dans une droite projective complexe $\Pi \approx \mathbb{CP}^1 \subset \mathbb{CP}^m$, et le relevé A vit dans le plan complexe $P = \mathbb{CP}^2$ engendré par Π et le centre de projection. Par la suite et jusqu'à mention explicite du contraire, on assimilera donc X à $X \cap P$ et le \mathbb{CP}^m sur lequel on projette à $\Pi = \mathbb{CP}^m \cap P \approx \mathbb{CP}^1$.

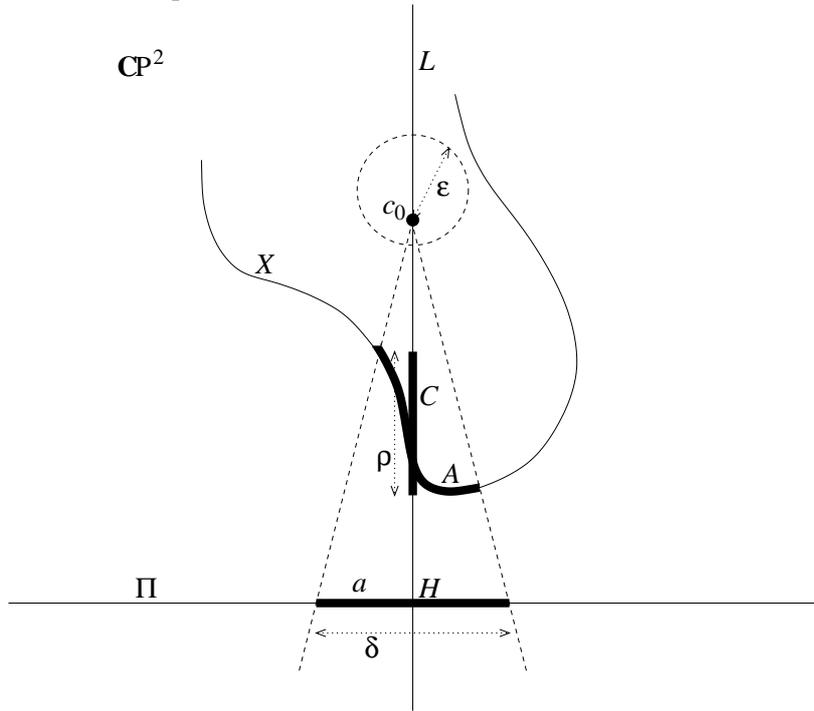
Soit H le milieu de l'arc $a \subset \Pi$. Soit L la droite projective complexe joignant H au centre de projection c_0 . Soit C la projection de l'arc $A \subset X$ sur L . La verticalité de X est évaluée par la longueur ρ de C .

Par construction, l'arc A se trouve à distance de X inférieure à $\delta/2$ dans \mathbb{CP}^2 .



On va maintenant prendre une carte affine $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ de $\mathbb{C}P^2$ dont le centre sera le milieu du segment joignant H au centre de projection, et telle que H aura pour coordonnées $(0, -1) \in \mathbb{C}^2$; c_0 sera ainsi le point $(0, 1) \in \mathbb{C}^2$, L sera la droite complexe $z_1 = 0$, et on projettera le tout à partir de c_0 sur la droite $z_2 = -1$.

(Si δ est assez petit, mettons $\delta \leq \pi/4$), tout se passe dans une boule B de \mathbb{C}^2 de rayon 3 autour de c_0 . Or, dans cette boule, on a $\text{dist}_{\mathbb{C}^2}/20 \leq \text{dist}_{\mathbb{C}P^2} \leq \text{dist}_{\mathbb{C}^2}$, inégalités qui nous permettent de raisonner indifféremment sur l'une des deux métriques.



(Les indications de longueur portées sur le dessin se réfèrent à la métrique de $\mathbb{C}P^n$.)

Soit Q un polynôme définissant X dans cette carte affine \mathbb{C}^2 . On normalise Q tel que son sup sur B soit égal à 1. D'après l'inégalité de Bernstein (cf. annexe B), son gradient a une norme inférieure à $2d/3$. Dans notre carte, C est à distance de X inférieure à $5/2\delta$. Par conséquent, comme Q est nul sur X , $|Q|$ est inférieur à $5/3 d\delta$ sur C .

Soit r le diamètre de C . On se place dans le $\mathbb{C} \subset \mathbb{C}^2$ contenant C et c_0 . On considère la boule B' de centre 0 et de rayon 2 dans ce \mathbb{C} : elle contient C et c_0 . D'après le lemme d'extrapolation (cf. annexe B), on a $\sup_{B'} |Q| \leq \left(\frac{40}{r}\right)^d \frac{5}{3} d\delta$

et en particulier

$$|Q(c_0)| \leq \frac{5}{3} \left(\frac{40}{r} \right)^d d \delta$$

Alors, le lemme d'annulation (cf. annexe B), appliqué à B , donne que la distance ε de c_0 à un zéro de Q vérifie

$$\frac{\varepsilon/3}{1 + \varepsilon/3} \leq \left(\frac{5}{3} \left(\frac{40}{r} \right)^d d \delta \right)^{1/d}$$

et par conséquent

$$\varepsilon \leq 400 d^{1/d} \delta^{1/d} / r$$

Or les zéros de Q sont les points de X , et on a choisi le centre de projection de manière à ce que sa distance à X soit plus grande que $1/(20d)^k$, donc $\varepsilon \geq 1/(20d)^k$, d'où

$$r \leq 400 20^k d^{k+1/d} \delta^{1/d}$$

qui est démontré pour la métrique de la carte affine (et donc a fortiori pour la métrique de \mathbb{CP}^n).

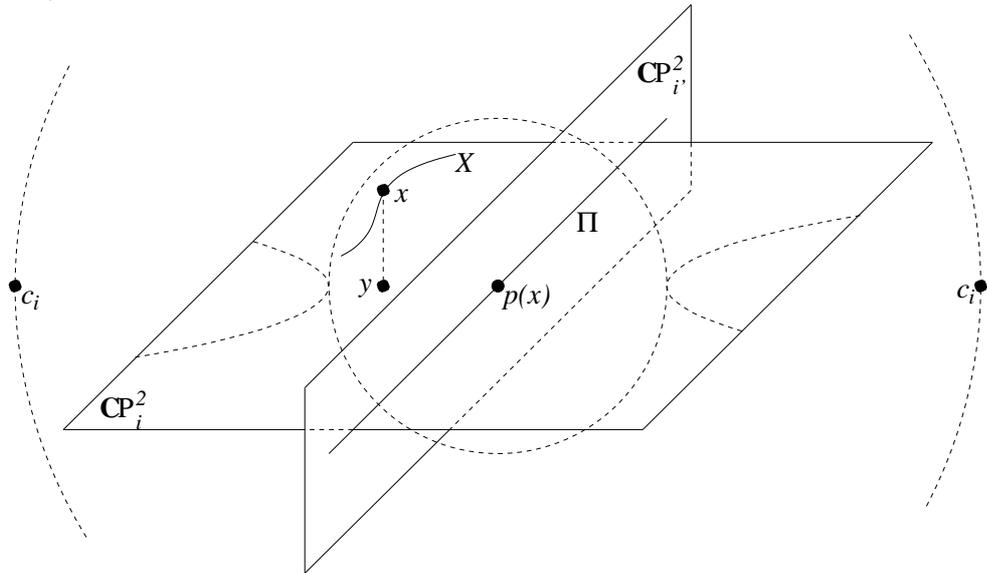
Passons à k quelconque. On considère toujours un arc $a \subset \mathbb{CP}^m$ et son relevé A par la projection p . a est inclus dans un $\Pi \approx \mathbb{CP}^1 \subset \mathbb{CP}^m$, et on considère donc l'espace E égal à $p^{-1}(\Pi)$, qui est l'espace \mathbb{CP}^{k+1} engendré par Π et le centre de projection \mathbb{CP}^k . Une fois de plus on se restreint à $X \cap E$ qui est une courbe complexe dans E .

Soient \mathbb{CP}_i^2 , $i = 1 \dots k$ k plans complexes deux à deux orthogonaux, contenant tous Π . On va projeter X sur chacun des \mathbb{CP}_i^2 pour se ramener au cas précédent. Soit c_i le point d'intersection de \mathbb{CP}_i^2 avec le centre de projection, et soit X_i le projeté de X sur \mathbb{CP}_i^2 .

Par la suite on notera (z_0, \dots, z_k) une carte affine de \mathbb{C}^{k+1} , où z_0 et z_i sont les directions du plan complexe \mathbb{CP}_i^2 (z_0 est simplement la direction de Π), centrée en un point quelconque de Π . La projection sur \mathbb{CP}_i^2 est alors $(z_0, z_1 \dots z_k) \mapsto (z_0, 0 \dots 0, z_i, 0, \dots 0)$.

Soient ε la distance de X au centre de projection, et $\varepsilon_i = \text{dist}(c_i, X_i)$. Montrons que $\varepsilon_i \geq \varepsilon$ (c'est évident et long à expliquer). Soit en effet $x \in X$. Prenons $p(x)$ comme centre de la carte affine. La condition que x soit à

distance plus grande que ε du centre \mathbb{CP}^{k-1} s'écrit $\sum_{j=1}^k |z_j|^2 \leq \text{Cste}$ (compte tenu de $z_{k+1} = 0$), et comme on a évidemment $|z_i|^2 \leq \sum_{j=1}^k |z_j|^2$, le projeté y de x sur \mathbb{CP}_i^2 vérifie aussi cette condition. Par conséquent, y est à distance plus grande que ε du centre, et donc $\text{dist}(c_i, y) \geq \varepsilon$. Dessin dans (la partie réelle de) \mathbb{CP}^3 (le cercle et les deux hyperboles délimitent l'hyperboloïde à distance ε du centre de projection, ce dernier étant représenté par le cercle à l'infini) :



Maintenant, par application de ce qui précède dans chacun des \mathbb{CP}_i^2 , on a démontré que pour chaque i , la projection de la projection de $A \subset X$ sur \mathbb{CP}_i^2 sur une droite de \mathbb{CP}_i^2 orthogonale à Π a un diamètre inférieur à $400 \cdot 20^k \cdot d^{k+1/d} \cdot \delta^{1/d}$. Autrement dit, on a une majoration du diamètre de l'image de A sous chacune des projections $(z_1, \dots, z_{k+1}) \mapsto (0, \dots, 0, z_i, 0, \dots, 0)$. Sauf pour $i = 0$ qui est la projection sur Π ; mais par hypothèse, la projection de A sur Π a un diamètre égal à δ , qui est de toute façon beaucoup plus petit que $400 \cdot 20^k \cdot d^{k+1/d} \cdot \delta^{1/d}$.

Chacun des axes de coordonnées sur lesquels on projette est une droite complexe \mathbb{CP}^1 . D'après le résultat de l'annexe A.2, on peut majorer la longueur de la courbe projetée, qui est de degré d , par $10d$ fois son diamètre. Chacune des courbes projetées a ainsi une longueur inférieure à $4000 \cdot 20^k \cdot d^{k+1+1/d} \cdot \delta^{1/d}$.

Alors, par application du résultat de l'annexe C.3, la longueur de la courbe est inférieure à $d/\sin \varepsilon$ fois la somme des longueurs de ses projetés, soit $d \cdot k/\sin \varepsilon$ fois la longueur d'un des projetés, ce qui, compte tenu de $\varepsilon \geq$

$1/(20d)^k$, donne :

$$\ell(A) \leq 5000 400^k k d^{2k+2+1/d} \delta^{1/d}$$

qui est, après quatre pages, le résultat final (de la section 4.2.5). \square

4.2.6 Bilan intermédiaire

Dans la section 4.2.5, on a prouvé que

$$\text{dist}_X \leq 10000 1000^k k d^{2k+2} (\text{dist}_{pc})^{1/d}$$

Dans la section 4.2.4, on a prouvé que

$$\text{dist}_{pc} = \text{dist}_p$$

dès qu'un des deux points est dans Σ .

Dans la section 4.2.3, on a prouvé que

$$\text{dist}_p \leq \pi (20d)^k \text{dist}_{|X}$$

Par conséquent, on vient de prouver que si $x \in X$, $y \in \Sigma$, alors

$$\text{dist}_X(x, y) \leq 100000 2000^k k 20^{k/d} d^{2k+2} (\text{dist}(x, y))^{1/d}$$

On connaît le (une majoration du) diamètre observable de X pour dist . On pourra l'utiliser pour évaluer ce diamètre pour dist_X , à condition de prouver que Σ (ou un petit voisinage de Σ) contient une part suffisamment importante de la masse de X . On commence pour cela par évaluer la (co)dimension de Σ .

4.2.7 Codimension de Σ

On rappelle que $\Sigma \subset X$ est l'ensemble des points où la projection $p : X \rightarrow \mathbb{C}P^m$ est de degré d , i.e. l'ensemble des points où les d antécédents d'un point de $\mathbb{C}P^m$ sont confondus.

A priori, la confusion de ces d points s'exprime par $d-1$ équations dans un espace de dimension k (dimension de la fibre de la projection), et on s'attend donc à ce que la codimension de Σ soit $k(d-1)$ dans X .

En fait, si X est bien choisi, Σ peut être plus grand : par exemple dans $\mathbb{C}P^n$, si on prend pour X la réunion de $d = 3$ hyperplans projectifs complexes concourants en un $\mathbb{C}P^{n-2}$, Σ est ce $\mathbb{C}P^{n-2}$ qui est de codimension 1 dans X et non 2.

On va montrer qu'en revanche Σ ne peut être plus petit.

Théorème . Σ est de codimension $\leq k(d-1)$ dans X .

En particulier, si $n \geq kd$, Σ ne peut être vide puisque X est de codimension k ; mais Σ peut très bien être vide pour $n < kd$ (mais n est destiné à tendre vers l'infini, à k et d fixés).

Démonstration . Considérons la fonction qui à un point de $\mathbb{C}P^m$ associe ses d antécédents (comptés avec multiplicités) par p dans $X \subset \mathbb{C}P^n \setminus \mathbb{C}P^{k-1}$. $\mathbb{C}P^n \setminus \mathbb{C}P^{k-1}$ est un fibré de dimension k sur $\mathbb{C}P^m$.

Soit d'abord $k=1$, et soit L le fibré en droites ainsi obtenu. Soit (x_1, \dots, x_d) l'ensemble des d antécédents dans X (avec multiplicités) d'un point de $\mathbb{C}P^m$. Dans une fibre, l'égalité de tous les x_i peut être exprimée au moyen des fonctions symétriques élémentaires par les équations :

$$\sum_{i=1}^d x_i^r = \frac{1}{d^{r-1}} \left(\sum_{i=1}^d x_i \right)^r$$

pour $r = 2 \dots d$ (pour $r = 1$ l'équation est triviale).

Dans chaque fibre, les x_i^r sont des nombres complexes, et globalement ils prennent leur place dans le fibré $L^{\otimes r}$. Soit Z_r l'ensemble des points de $\mathbb{C}P^m$ vérifiant la r -ième équation $\sum_{i=1}^d x_i^r = \left(\sum_{i=1}^d x_i \right)^r / d^{r-1}$ pour $r \geq 2$. Z_r est l'ensemble des zéros d'une section du fibré $L^{\otimes r}$ qui est de dimension 1, c'est donc une hypersurface (ou éventuellement tout $\mathbb{C}P^m$). Les points de $\mathbb{C}P^m$ où tous les x_i coïncident sont les points de l'intersection des Z_r , $r = 2 \dots d$; ce sont donc les points d'une intersection de $d-1$ hypersurfaces, ils forment par conséquent une sous-variété de codimension inférieure à $d-1$ dans $\mathbb{C}P^m$. Puisque $\dim X = m$, Σ , qui est l'ensemble des antécédents de ces points, est donc aussi de codimension $\leq d-1$.

Passons à k quelconque. Le fibré de dimension k sur $\mathbb{C}P^m$ induit par la projection est le fibré normal de $\mathbb{C}P^m$, qui se décompose en la somme de k fois le fibré L ci-dessus. Alors, en recommençant le raisonnement ci-dessus dans chaque composante, l'ensemble des points où tous les x_i coïncident est l'intersection de $k(d-1)$ ensembles des zéros de sections de fibrés de dimension 1. Il est donc de codimension $\leq k(d-1)$. \square

4.2.8 Volume d'un voisinage de Σ dans X

On cherche désormais à montrer qu'un petit voisinage de Σ contient une part importante de la masse de X . Cela va dépendre de la codimension de Σ calculée ci-dessus.

Théorème . Soient X et Y deux sous-variétés algébriques de $\mathbb{C}P^n$, de codimensions respectives k et ℓ . Soit μ_X la mesure riemannienne de volume normalisée sur X , et soit $U_\varepsilon(Y)$ l'ensemble des points à distance $\leq \varepsilon$ de Y . Alors

$$\mu_X(X \cap U_\varepsilon(Y)) \geq 1 - \left(\frac{8}{\varepsilon}\right)^{2k} e^{-2k\varepsilon^2 n/72 \max(k,\ell)}$$

Démonstration . Soit $X_0 = X \setminus U_\varepsilon(Y)$. Soient ε_0 et ε_1 tels que $\varepsilon_0 + \varepsilon_1 = \varepsilon$, et soient $\varepsilon'_0 < \varepsilon_0$, $\varepsilon'_1 < \varepsilon_1$. Soient $U_0 = U_{\varepsilon'_0}(X_0)$ et $U_1 = U_{\varepsilon'_1}(Y)$. U_0 et U_1 sont alors à distance supérieure à $\varepsilon - \varepsilon'_0 - \varepsilon'_1$ l'un de l'autre.

Par ailleurs, comme au 3.2 dans le cas de la sphère, on a en posant $\kappa = \mu_X(X_0)$

$$\mu(U_0) \geq b(k, \varepsilon'_0) \kappa \text{ et } \mu(U_1) \geq b(\ell, \varepsilon'_1)$$

où μ est la mesure de volume normalisée sur $\mathbb{C}P^n$, et $b(k, \varepsilon)$ le volume d'une boule de dimension $2k$ dans $\mathbb{C}P^n$. On évalue très simplement $b(k, \varepsilon) \geq (\varepsilon/4)^{2k}$ pour $\varepsilon \leq 1$.

Soit alors κ' la plus petite des deux mesures $\kappa(\varepsilon'_0/4)^{2k}$ et $(\varepsilon'_1/4)^{2\ell}$. On a ainsi deux parties de mesure $\geq \kappa'$. D'après le théorème de concentration sur la sphère mentionné en 1.2 (que l'on rapporte à $\mathbb{C}P^n$ de la même manière qu'en 4.1), la distance entre ces deux parties est alors inférieure à $3/\sqrt{n} \sqrt{-\log \kappa'}/2$. Or cette distance est supérieure à $\varepsilon - \varepsilon'_0 - \varepsilon'_1$. En prenant $\varepsilon'_0 = \varepsilon_0/2$, $\varepsilon'_1 = \varepsilon_1/2$, on obtient

$$\frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{3}{\sqrt{n}} \max\left(\sqrt{-2k \log(\kappa^{1/2k} \varepsilon_0/8)}, \sqrt{-2\ell \log \varepsilon_1/8}\right)$$

Prenons donc ε_0 et ε_1 dans une proportion de 1 à $\kappa^{1/2k}$ (i.e. $\varepsilon_0 = \varepsilon/(1 + \kappa^{1/2k})$ et $\varepsilon_1 = \varepsilon \kappa^{1/2k}/(1 + \kappa^{1/2k})$), de manière à avoir $\kappa^{1/2k} \varepsilon_0/8 = \varepsilon_1/8$. On obtient de la sorte

$$\frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{3}{\sqrt{n}} \sqrt{-2m \log \kappa^{1/2k} \varepsilon/8}$$

où $m = \max(k, \ell)$, qui donne immédiatement le résultat. \square

Notons qu'à aucun moment on n'a utilisé de condition de type $k + \ell \geq n$ qui indiquerait que génériquement, X et Y s'intersectent. Par contre, on a évidemment supposé que X et Y étaient non vides, soit $k \leq n$, $\ell \leq n$.

4.2.9 Évaluation finale du diamètre observable

On va enfin utiliser notre majoration de dist_X par dist sur Σ . On suppose Σ non vide (ce qui est vrai lorsque $n \geq kd$). Considérons un voisinage $U = U_\varepsilon(\Sigma) \cap X$ de Σ dans X (voisinage pour la distance dist). Majorons d'abord dist_X par dist sur U . Soient $x, x' \in U$ et soient $y, y' \in \Sigma$ les points de Σ les plus proches de x et x' respectivement. On rappelle qu'il suffit que l'un des deux points soit dans Σ pour avoir $\text{dist}_X \leq C_{k,d} (\text{dist})^{1/d}$. Alors

$$\begin{aligned} \text{dist}_X(x, x') &\leq \text{dist}_X(x, y) + \text{dist}_X(y, y') + \text{dist}_X(y', x') \\ &\leq 2C_{k,d}\varepsilon^{1/d} + C_{k,d}(\text{dist}(y, y'))^{1/d} \\ &\leq C_{k,d}\left(2\varepsilon^{1/d} + (\text{dist}(x, x') + 2\varepsilon)^{1/d}\right) \end{aligned}$$

avec $C_{k,d} \leq 100000 2000^k k 20^{k/d} d^{2k+2}$.

On rappelle que $\text{sep}(U, \kappa, \kappa)$ est la distance maximale entre deux parties de U de mesure $\geq \kappa$. On va utiliser ces distances de séparation pour transférer l'évaluation du diamètre pour dist au diamètre pour dist_X :

$$\begin{aligned} \text{ObsDiam}(U, \kappa)_{\text{dist}_X} &\leq \text{sep}(U, \kappa/2, \kappa/2)_{\text{dist}_X} \\ &\leq C_{k,d}\left(2\varepsilon^{1/d} + (\text{sep}(U, \kappa/2, \kappa/2)_{\text{dist}} + 2\varepsilon)^{1/d}\right) \\ &\leq C_{k,d}\left(2\varepsilon^{1/d} + (2\varepsilon + \text{ObsDiam}(U, \kappa/2)_{\text{dist}})^{1/d}\right) \end{aligned}$$

Par ailleurs, si $\kappa_\varepsilon = \mu_X(X \setminus U)$, on a évidemment en toute généralité

$$\text{ObsDiam}(X, \kappa + \kappa_\varepsilon)_{\text{dist}_X} \leq \text{ObsDiam}\left(U, \frac{\kappa}{1 - \kappa_\varepsilon}\right)_{\text{dist}_X}$$

qui énonce que le diamètre que l'on observe en négligeant une partie bien choisie de mesure $\kappa + \kappa_\varepsilon$ est inférieur au diamètre qu'on observe en négligeant une partie κ dans un sous-ensemble particulier qui néglige déjà une partie κ_ε de la mesure, le $1/(1 - \kappa_\varepsilon)$ n'étant qu'un facteur de normalisation.

Et aussi bien sûr :

$$\text{ObsDiam}\left(U, \frac{\kappa/2}{1 - \kappa_\varepsilon}\right)_{\text{dist}_X} \leq \text{ObsDiam}(X, \kappa/2)_{\text{dist}} \leq \frac{4\sqrt{k}}{\sqrt{n}} \sqrt{-\log\left(\kappa^{1/k} \frac{k}{n}\right)}$$

Tout cela donne la majoration recherchée de $\text{ObsDiam}_{\text{dist}_X}$ par $\text{ObsDiam}_{\text{dist}}$:

$$\text{ObsDiam}(X, \kappa + \kappa_\varepsilon)_{\text{dist}_X} \leq C_{k,d}\left(2\varepsilon^{1/d} + (2\varepsilon + \text{ObsDiam}(X, \kappa/2)_{\text{dist}})^{1/d}\right)$$

où il reste encore à choisir ε au mieux.

Pour que les termes en ε soient du même ordre que le terme en ObsDiam , on devrait prendre $\varepsilon = 4\sqrt{k/n}\sqrt{-\log(\kappa^{1/k}k/n)}$, mais afin de ménager κ_ε , on va prendre la même expression en remplaçant k par ℓ où ℓ est la codimension de Σ dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, et avec un facteur 10 au lieu de 4. Comme X est de codimension k , et que la codimension de Σ dans X est $\leq k(d-1)$, la codimension de Σ dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ vérifie $k \leq \ell \leq kd$.

On prend donc $\varepsilon = 10\sqrt{\ell/n}\sqrt{-\log(\kappa^{1/\ell}\ell/n)}$. On trouve ainsi

$$\text{ObsDiam}(X, \kappa + \kappa_\varepsilon)_{\text{dist}_X} \leq 100 C_{k,d} \left(-\frac{k}{n} \log \left(\kappa^{1/k} \frac{k}{n} \right) \right)^{1/2d}$$

Il reste à majorer $\kappa_\varepsilon = \mu_X(X \setminus U_\varepsilon(\Sigma))$. On applique à Σ et X le résultat de 4.2.8 sur le volume du voisinage d'une sous-variété :

$$\kappa_\varepsilon \leq \left(\frac{8}{\varepsilon} \right)^{2k} e^{-2k\varepsilon^2 n/72\ell}$$

qui donne

$$\kappa_\varepsilon \leq \left(\frac{16/25}{-\log(\kappa^{1/\ell}\frac{\ell}{n})} \frac{n}{\ell} \left(\kappa^{1/\ell} \frac{\ell}{n} \right)^{25/9} \right)^k$$

On veut obtenir $\kappa_\varepsilon \leq \kappa$. Posant $x = \kappa^{1/\ell}\ell/n$, il vient simplement $x^{16/9} \leq -25/16 \log x$, qui est vérifié pour $x \leq 1/2$, soit $\kappa \leq (n/2\ell)^\ell$ qui, comme $k \leq \ell \leq kd$, est vérifié pour $\kappa \leq (n/2kd)^k$ (et donc en particulier dès que $n \geq 2kd$).

Si $n \leq 2kd$, on a donc une limitation sur l'information obtenue. Mais il convient de rappeler que si $n < kd$, Σ peut être vide.

4.2.10 Diamètre observable des sous-variétés algébriques de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$

On vient donc de démontrer l'irritant

Théorème .

$$\text{ObsDiam}(X, 2\kappa)_{\text{dist}_X} \leq 10000000 2000^k k 20^{k/d} d^{2k+2} \left(-\frac{k}{n} \log \left(\kappa^{1/k} \frac{k}{n} \right) \right)^{1/2d}$$

pour $n \geq 2kd$.

En particulier, pour k et d fixés, on a

$$\text{ObsDiam}(X)_{\text{dist}_X} \leq C \left(\frac{\log n}{n} \right)^{1/2d}$$

A Annexe : la formule de Crofton

A.1 Explication

La (plutôt les) formule(s) de Crofton relie(nt) la mesure d'une partie X de S^n (ou de $\mathbb{C}P^n$) à la taille moyenne de l'intersection de X avec les sous-sphères équatoriales $S^k \subset S^n$. On ne donnera pas ici de démonstration rigoureuse ; voir [Fed].

Plus précisément, si X est une partie d'une sous-variété de S^n , de dimension m , on considère les intersections de X avec les sphères $S^k \subset S^n$ pour $k \geq n - m$ (sinon l'intersection est presque sûrement vide). L'intersection est (génériquement) de dimension $k - (n - m)$.

Si vol_ℓ désigne le volume usuel en dimension ℓ (vol_0 est simplement la mesure de comptage des points), on a alors :

$$\int_{S^k \subset S^n} \text{vol}_{k-(n-m)}(X \cap S^k) dS^k = \text{vol}_m X \frac{\text{vol } S^{k-(n-m)}}{\text{vol } S^m}$$

où $\text{vol } S^m$ est un terme de normalisation et où $S^{k-(n-m)}$ représente l'intersection générique de S^k et de S^m .

dS^k est une mesure définie sur l'ensemble des sous-sphères équatoriales (i.e. de rayon 1) de S^n . Elle est invariante par rotation, et est normalisée de telle sorte que $\int_{S^k \subset S^n} dS^k = 1$.

Intuitivement, on se convainc de la validité de cette formule en constatant qu'une fonction sur les parties de dimension m de la sphère, qui est invariante par les isométries de la sphère et additive pour des réunions disjointes, ne peut guère être que proportionnelle à une mesure riemannienne de dimension idoine.

A.2 Longueurs et diamètres dans $\mathbb{C}P^1$

On considère une courbe algébrique *réelle* C dans $\mathbb{C}P^1 = S^2$, de degré d . On cherche à majorer la longueur de cette courbe par son diamètre.

La longueur $\ell(C)$ vaut, d'après la formule de Crofton :

$$\ell(C) \frac{2}{2\pi} = \int_{S^1 \subset S^2} \#(C \cap S^1) dS^1$$

où S^1 parcourt les grands cercles de S^2 .

Or comme C est de degré d , chaque S^1 rencontre C au plus d fois, donc

$$\int_{S^1 \subset S^2} \#(C \cap S^1) \, dS^1 \leq d \int_{S^1 \subset S^2} dS^1$$

Soit r le diamètre de C et soit c un point tel que tout point de C est à distance $\leq r$ de c . Soient $B \subset S^2$ la boule de centre c et de rayon $2r$ sur la sphère, et B' la boule de centre c et de rayon r . Tout grand cercle rencontrant $C \subset B'$ passe dans B , et alors la portion de sa longueur contenue dans B est supérieure à $2r$. Donc

$$\int_{S^1 \subset S^2} dS^1 \leq \int_{S^1 \subset B} \frac{1}{2r} \ell(S^1 \cap B) \, dS^1$$

Enfin, d'après la formule de Crofton,

$$\int_{S^1 \subset B} \ell(S^1 \cap B) \, dS^1 = \text{vol } B \frac{2\pi}{4\pi}$$

où $\text{vol } B \leq 4\pi r^2$.

Finalement, $\ell(C) \leq d/2r \cdot 4\pi r^2 \cdot 2\pi/4\pi$ soit

$$\ell(C) \leq d \pi^2 \text{diam } C$$

qui est le résultat cherché.

B Annexe : quelques propriétés des polynômes complexes

Lemme (théorème de Gauß-Lucas). *Soit P un polynôme complexe. Les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P .*

Démonstration . Supposons au contraire qu'il existe un point $x \in \mathbb{C}$ tel que $P'(x) = 0$ et un demi-plan E passant par x où P ne s'annule pas. Par changement de variables, on peut prendre $x = 0$, $E = \{z, \Re z \geq 0\}$ et P normalisé. La dérivée du module de P est donc nulle en 0. Or le module de P est le produit de la distance à des points situés strictement dans le demi-plan gauche. Par conséquent en tout point du demi-plan droit, et en particulier en 0, la dérivée $\partial|P|/\partial x$ de ce module est strictement positive (où x est la partie réelle de la variable complexe z), ce qui est absurde. \square

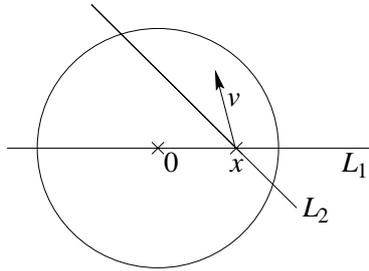
Théorème (inégalité de Bernstein). Soit P un polynôme de degré d sur \mathbb{C}^n et $B \subset \mathbb{C}^n$ une boule de rayon R . Alors

$$\sup_B \|\text{grad } P\| \leq \frac{2d}{R} \sup_B |P|$$

Démonstration . Prenons d'abord $n = 1$ et $B = B(0, 1) \subset \mathbb{C}$. D'après le principe du maximum, $|P|$ et $|P'|$ atteignent leur maximum sur ∂B . Soit a une valeur prise par P' en un point $x \in \partial B$, et soit $b = a/(dx^{d-1})$. x est une racine du polynôme $P'(X) - b d X^{d-1}$, qui est la dérivée du polynôme $Q(X) = P(X) - b X^d$. D'après le théorème de Gauß-Lucas, les racines de Q' sont dans l'enveloppe convexe des racines de Q . Comme $|x| = 1$, Q possède une racine y de module ≥ 1 : $P(y) = b y^d$. Mais $P(X)/X^d$ est un polynôme en $1/X$, donc, par inversion, le sup de son module sur $\mathbb{C} \setminus \overset{\circ}{B}(0, 1)$ est atteint sur ∂B . Il existe donc $z \in \partial B$ tel que $|P(z)| = |P(z)/z^d| = |b| = |a/(dx^{d-1})| = |a|/d$, ce qui montre que sur ∂B , donc sur B , on a $\sup |P'| \leq d \sup |P|$ (sans le coefficient 2).

Maintenant, supposons $n \geq 2$, et prenons toujours $B = B(0, 1) \subset \mathbb{C}^n$. Soit $x \in B$. L'idée est d'appliquer le cas $n = 1$ en restreignant P à l'intersection de B avec la droite complexe engendrée par $\text{grad } P(x)$. Le problème est que le disque obtenu par cette intersection peut être de rayon très petit. On va donc prendre l'intersection de B avec une droite complexe L passant par x mais faisant avec $\text{grad } P(x)$ un angle non nul, de manière à obtenir un disque de rayon raisonnablement grand qui donnera une estimation de la projection sur L de $\text{grad } P(x)$.

Si $x = 0$, l'intersection de B avec la droite complexe engendrée par $\text{grad } P(x)$ est de rayon 1, ce qui résout le problème. Soit $x \neq 0$, et soit L_1 la droite complexe engendrée par x . $L_1 \cap B$ est un disque de \mathbb{C} de rayon 1. Soit $v = \text{grad } P(x)$. Si $v \in L_1$, le problème est résolu en restreignant P à $L_1 \cap B$. Sinon, plaçons-nous dans \mathbb{C}^2 engendré par L_1 et v . Si l'angle entre L_1 et v est inférieur à $\pi/4$, toujours en se restreignant à $L_1 \cap B$, on obtient une majoration de la projection de v sur L_1 par $d \sup P$, et donc $\|v\| \leq \sqrt{2} d \sup P$. Si l'angle est supérieur à $\pi/4$, on prend l'intersection de B avec une droite complexe L_2 passant par x et faisant avec L_1 un angle $\pi/4$ (il y a deux possibilités, on choisit selon l'orientation de v). Alors la norme de v est inférieure à $\sqrt{2}$ fois la norme de son projeté sur L_2 , et de plus $L_2 \cap B$ est un disque de rayon au moins égal à $\sqrt{2}/2$. En appliquant le cas $n = 1$ dans ce disque, on trouve $\|\text{grad } P\| \leq 2d \sup P$. \square



Théorème (distance aux zéros). Soit $P \neq 0$ un polynôme complexe de degré d sur \mathbb{C}^n , et soit $B \subset \mathbb{C}^n$ une boule de rayon R . Il existe un point de B qui est à distance plus grande que $R/2d$ de l'ensemble des zéros de P dans B .

Démonstration . Supposons que tout point de B est à distance inférieure à ε d'un zéro de P . Par conséquent, $|P| \leq \varepsilon \sup \|\text{grad } P\|$. Comme $\|\text{grad } P\| \leq 2d/R \sup |P|$, on a $\sup |P| \leq \varepsilon 2d/R \sup |P|$ d'où $\varepsilon \geq R/2d$. \square

Notons qu'en dimension 1, par simple évaluation du volume des boules autour des zéros de P , on trouve que R/\sqrt{d} convient.

Par ailleurs, on n'a majoré que la distance aux zéros situés dans B , et il se peut que le point obtenu soit proche d'un zéro situé à l'extérieur de B . Dans ce cas, il suffit de ramener le point trouvé vers l'intérieur, d'une distance $R/4d$, et on trouve ainsi un point distant d'au moins $R/4d$ de tous les zéros de P .

Théorème (lemme d'annulation). Soit P un polynôme de degré d sur une boule $B(x_0, R) \subset \mathbb{C}^n$ centrée en x_0 . On suppose que $|P(x_0)| \leq a < b \leq \sup_B |P|$. Alors la distance δ de x_0 à l'ensemble des zéros de P vérifie

$$\frac{\delta/R}{1 + \delta/R} \leq \left(\frac{a}{b}\right)^{1/d}$$

Démonstration . En prenant l'intersection de B avec la droite complexe contenant le centre x_0 et le point où on sait que $|P| \geq b$, on se ramène au cas où $n = 1$. Prenons $x_0 = 0$, $R = 1$. Soient $z_1 \dots z_d$ les racines de P . soit $\delta = \min \text{dist}(0, z_i)$. On a

$$\left|\frac{b}{a}\right| \leq \left|\frac{\sup_{x \in B} \prod (x - z_i)}{\prod (-z_i)}\right| = \sup_{x \in B} \prod \left|1 - \frac{x}{z_i}\right| \leq \left(1 + \frac{1}{\delta}\right)^d$$

\square

Théorème (lemme d'inter/extrapolation). Soit P un polynôme de degré d sur \mathbb{C} , $B(x_0, R) \subset \mathbb{C}$ une boule de rayon R . Soit $C \subset B$ une courbe de diamètre δ . Alors

$$\sup_B |P| \leq \left(\frac{CR}{\delta}\right)^d \sup_C |P|$$

pour une certaine constante $C \leq 6e$.

Démonstration . Prenons $B = B(0, 1)$ et $P(X) = \prod (X - z_i)$. Soit I un segment dont les extrémités sont deux points de C à distance δ l'un de l'autre. Soient z'_i les projections des z_i sur I . Pour $0 \leq z \leq \delta$, on a $\int_0^\delta \log |x - z| dx \geq \delta \log(\delta/2e)$. Par conséquent :

$$\sum_i \int_{x \in I} \log |x - z'_i| dx \geq d \delta \log \frac{\delta}{2e}$$

et donc, puisque I est de longueur δ :

$$\max_{x \in I} \sum_i \log |x - z'_i| \geq d \log \frac{\delta}{2e}$$

Comme $x \in I$ est le projeté sur I d'un point $y \in C$ et que cette projection contracte les distances :

$$\max_C |P| = \max_{y \in C} \prod |y - z_i| \geq \left(\frac{\delta}{2e}\right)^d$$

qui est déjà intéressant en soi.

Maintenant, si pour tout i , $|z_i| \leq 2$, alors $\sup_B |P| \leq 3^d$ (tout point de la boule est à distance inférieure à 3 de toute racine) et le théorème est vrai avec $C = 6e$. Sinon, écrivons $P = P_+ P_-$, où P_+ et P_- contiennent les racines de module > 2 et ≤ 2 et sont de degrés d_+ et d_- respectivement. À P_- on peut appliquer le théorème : $\sup_B P_- \leq \sup_C P_- \left(\frac{6e}{\delta}\right)^{d_-}$. Par ailleurs, un point de la boule unité ne peut être plus de trois fois plus loin d'un point de module > 2 qu'un autre point de la boule unité. Par conséquent, $\sup_B P_+ \leq 3^{d_+} \inf_C P_+$. Alors :

$$\sup_B P \leq \sup_B P_+ \sup_B P_- \leq 3^{d_+} \inf_C P_+ \sup_C P_- \left(\frac{6e}{\delta}\right)^{d_-} \leq \left(\frac{6e}{\delta}\right)^d \sup_C P$$

□

C Annexe : rappels de géométrie projective

C.1 Métrique projective

On commence par rappeler l'expression de la métrique riemannienne sur $\mathbb{C}P^n$. Soit $Z = (z_0 \dots z_n)$ un point de \mathbb{C}^{n+1} , et soit $dZ = (dz_0 \dots dz_n)$ un vecteur tangent à \mathbb{C}^{n+1} en Z . On cherche l'unique métrique homogène, invariante par $U(n+1)$ et coïncidant en $(1 \dots 0) \in \mathbb{C}^{n+1}$ avec $\sum_{i=1}^n |dz_i|^2$ (où on supprime $|dz_0|^2$). Si $r^2 = \sum_{i=0}^n |z_i|^2$, on voit immédiatement que $\frac{1}{r^2} \left\| dZ - \frac{(Z|dZ)Z}{\|Z\|^2} \right\|^2$ est la métrique recherchée, où $\|\cdot\|^2$ est la métrique euclidienne usuelle sur \mathbb{C}^{n+1} (on a simplement retiré la composante radiale de dZ et normalisé l'ensemble). En coordonnées dans \mathbb{C}^{n+1} , cela donne :

$$|dZ|_{\mathbb{C}P^n}^2 = \frac{1}{r^2} \sum_{i=0}^n |dz_i|^2 - \frac{1}{r^4} \sum_{i=0}^n |\bar{z}_i dz_i|^2$$

Dans une carte affine \mathbb{C}^n , la distance à 0 dans $\mathbb{C}P^n$ d'un point situé à distance ρ de 0 dans \mathbb{C}^n est ainsi $\arctan \rho$.

On notera que par conséquent, dans une carte affine, si l'on est à distance plus grande que θ de l'infini (qui est à distance $\pi/2$ de l'origine), le rapport entre la métrique sur la carte et la métrique sur $\mathbb{C}P^n$ est compris entre 1 et $1/\sin^2 \theta$.

C.2 Dilatation par les projections

On considère dorénavant la projection orthogonale sur le plan $\{z_0 = 0\} \subset \mathbb{C}^{n+1}$, qui nous sert souvent dans l'exposé (cf. dessin dans le corps de l'exposé). On la notera p . Le centre de la projection est le point $(1 : 0 \dots 0) \in \mathbb{C}P^n$.

Soit $x \in \mathbb{C}P^n$. On s'intéresse au sort de la métrique au voisinage de x par la projection p , qui risque d'augmenter si x est proche du centre de projection. On prend une carte affine $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$ de $\mathbb{C}P^n$ dont l'origine est $p(x)$, et telle que le $\mathbb{C}P^{n-1}$ sur lequel on projette soit un hyperplan horizontal ($y_n = 0$). Le centre de la projection est alors le point à l'infini dans la direction verticale, et la projection est simplement $(y_1, \dots, y_{n-1}, y_n) \mapsto (y_1, \dots, y_{n-1}, 0)$. x a comme coordonnées $(0, \dots, 0, h)$. Soit $(dy_i)_{i=1 \dots n}$ un vecteur tangent en

x . D'après la formule ci-dessus avec $z_0 = 1, z_1 \dots z_{n-1} = 0, z_n = h$ et $r^2 = 1 + |h|^2$, la longueur de ce vecteur est $\sqrt{\frac{1}{r^4} \left(r^2 \sum_{i=1}^n |dy_i|^2 - |\bar{h} dy_n|^2 \right)}$,

soit encore $\sqrt{\frac{1}{r^2} \left(\frac{|dy_n|^2}{r^2} + \sum_{i=1}^{n-1} |dy_i|^2 \right)}$. L'image de ce vecteur tangent par la

projection a simplement une longueur $\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} |dy_i|^2}$.

On voit donc que la longueur du vecteur projeté est inférieure à $r = \sqrt{1 + |h|^2}$ fois la longueur du vecteur initial.

Notons que si c est le centre de projection, on a simplement $h = \tan(\pi/2 - \text{dist}_{\mathbb{CP}^n}(x, c))$. Par conséquent, la dilatation de la projection est inférieure à $1/\sin(\text{dist}_{\mathbb{CP}^n}(x, c))$.

C.3 Longueur d'une courbe et de ses projetés

Soit une courbe réelle dans \mathbb{CP}^n . On cherche à majorer sa longueur en fonction de la longueur de ses projetés sur n droites projectives \mathbb{CP}^1 concourantes et deux à deux orthogonales.

Prenons une carte $(z_1 \dots z_n) \in \mathbb{C}^n$ où ces projections s'écrivent $(z_1 \dots z_n) \mapsto (0 \dots 0, z_i, 0 \dots 0)$.

Soit $dZ = (dz_1 \dots dz_n)$ un vecteur tangent au point $(z_1 \dots z_n)$ de la carte. Si $h^2 = \sum |z_i|^2$, le carré de sa longueur dans \mathbb{CP}^n est donnée par

$$|dZ|_{\mathbb{CP}^n}^2 = \frac{1}{(1 + h^2)^2} \sum |dz_i|^2 (1 + h^2 - |z_i|^2)$$

et les carrés des longueurs de ses projetés sont

$$\frac{1}{(1 + |z_i|^2)^2} |dz_i|^2$$

Si on montre que $(1 + h^2 - |z_i|^2) / (1 + h^2)^2 \leq C^2 / (1 + |z_i|^2)^2$, on aura montré que le carré de la longueur d'un vecteur tangent est plus petite que C^2 fois la somme des carrés des longueurs de ses projetés. Comme pour des nombres positifs, on a $\sum x_i^2 \leq (\sum x_i)^2$, on aura aussi montré que sa longueur est plus petite que C fois la somme des longueurs de ses projetés.

Or, comme $|z_i|^2 \leq h^2$, on a évidemment

$$(1 + h^2 - |z_i|^2) (1 + |z_i|^2)^2 / (1 + h^2)^2 \leq (1 + h^2) (1 + h^2)^2 / (1 + h^2)^2 = 1 + h^2$$

et par conséquent $C^2 = 1 + h^2$ convient.

Donc la longueur dans $\mathbb{C}P^n$ d'un vecteur tangent est plus petite que $\sqrt{1 + h^2}$ fois la somme des longueurs dans $\mathbb{C}P^n$ de ses projetés.

Par conséquent, si la courbe C de départ reste à distance plus grande que a de l'infini, on a $1 + h^2 \leq 1/\sin^2 a$ en chacun de ses points, et donc la longueur d'un petit arc de courbe est inférieure à $1/\sin a$ fois la somme des longueurs de ses projetés. Ceci permet de conclure si les projections sont injectives. Sinon, si les projections sont au plus de multiplicité d , la longueur de la courbe est inférieure à $d/\sin a$ fois la somme des longueurs de ses projetés.

D Annexe : évaluation de $\int (\cos t)^k dt$

On va d'abord chercher un encadrement de $\int_{\varepsilon}^{\pi/2} (\cos t)^k dt$, puis étudier le cas particulier de $\varepsilon = \lambda/\sqrt{k}$.

On part du fait que sur $[-\pi/2; \pi/2]$, $\cos t \leq e^{-t^2/2}$. Alors :

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{\pi/2} (\cos t)^k dt &\leq \int_{\varepsilon}^{\pi/2} e^{-kt^2/2} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{k}} \int_{\varepsilon\sqrt{k}}^{\frac{\pi}{2}\sqrt{k}} e^{-t^2/2} dt \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{k}} \int_{\varepsilon\sqrt{k}}^{\infty} e^{-t^2/2} dt \\ &\leq \frac{e^{-k\varepsilon^2/2}}{\sqrt{k}} \int_0^{\infty} e^{-t^2/2} dt \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-k\varepsilon^2/2}}{\sqrt{k}} \end{aligned}$$

En particulier, pour $\varepsilon = 0$, on a $\int_0^{\pi/2} (\cos t)^k dt \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Par ailleurs, $\cos t \geq 1 - \frac{t^2}{2}$. Donc pour $\varepsilon \leq \pi/4$:

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{\pi/2} (\cos t)^k dt &\geq \int_{\varepsilon}^{\pi/2} (1 - t^2/2)^k dt \\ &\geq \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} (1 - t^2/2)^k dt \\ &\geq \varepsilon (1 - 2\varepsilon^2)^k \end{aligned}$$

Maintenant, on s'intéresse au cas $\varepsilon = \lambda/\sqrt{k}$.

$$\begin{aligned} \int_{\lambda/\sqrt{k}}^{\pi/2} (\cos t)^k dt &\leq \int_{\lambda/\sqrt{k}}^{\pi/2} e^{-kt^2/2} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{k}} \int_{\lambda}^{\frac{\pi}{2}\sqrt{k}} e^{-t^2/2} dt \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{k}} \int_{\lambda}^{\infty} e^{-t^2/2} dt \end{aligned}$$

pour la majoration. Pour la minoration :

$$\begin{aligned} \int_{\lambda/\sqrt{k}}^{\pi/2} (\cos t)^k dt &\geq \int_{\lambda/\sqrt{k}}^{\pi/2} (1 - t^2/2)^k dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{k}} \int_{\lambda}^{\frac{\pi}{2}\sqrt{k}} \left(1 - \frac{t^2}{2k}\right)^k dt \end{aligned}$$

Or $\left(1 - \frac{t^2}{2k}\right)^k$ croît vers $e^{-t^2/2}$. Donc $\int_{\lambda}^{\frac{\pi}{2}\sqrt{k}} \left(1 - \frac{t^2}{2k}\right)^k dt = (1 - o_{\lambda}(1)) \int_{\lambda}^{\infty} e^{-t^2/2} dt$,
où on peut montrer que $0 < o_{\lambda}(1) < \frac{\pi^2}{4\sqrt{k}} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{(\lambda+1)^2/2} e^{-\frac{\pi^2}{8}\sqrt{k}}$.

En particulier pour $\lambda = 0$, on obtient $\int_0^{\pi/2} (\cos t)^k dt \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Finalement, en regroupant les résultats, on obtient que :

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} (\varepsilon\sqrt{n}) (1 - 2\varepsilon^2)^n \leq \kappa_{n+1}(\varepsilon) \leq e^{-n\varepsilon^2/2} + o(1)$$

et que

$$\kappa_{n+1} \left(\frac{\lambda}{\sqrt{n}} \right) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\lambda}^{\infty} e^{-t^2/2} dt$$

Références

- [Fed] H. Federer, *Some integralgeometric theorems*, Trans. of the A. M. S. **77** (1954), p. 238-261.
- [FLM] T. Figiel, J. Lindenstrauss, V. Milman, *The dimension of almost spherical sections of convex bodies*, Acta Math. **139** (1977), p. 53-94.
- [GH] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley, New York (1978).
- [Gro] M. Gromov, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Progress in Math. 152, Birkhäuser, Boston (1999).
- [Lév] P. Lévy, *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Gauthier-Villars, Paris (1922), réédité en 1951 sous le titre *Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle*.
- [MS] V. Milman, G. Schechtman, *Asymptotic theory of finite dimensional normed spaces*, Lecture Notes in Mathematics 1200, Springer-Verlag, Berlin (1986).
- [Tal] M. Talagrand, *A new look at independence*, Ann. Prob. **24** (1996), 1, p. 1-37.

Table des matières

1	Concentration sur la sphère	2
1.1	Concentration de la mesure sur la sphère	2
1.2	Concentration des fonctions lipschitziennes sur la sphère	3
2	Diamètre observable	4
3	Diamètre observable des sous-variétés de S^n	5
3.1	Diamètre observable de S^n	5
3.2	Le cas des sous-variétés de S^n	6
4	Diamètre observable des sous-variétés algébriques de $\mathbb{C}P^n$	8
4.1	Le cas de la distance induite sur X par $\mathbb{C}P^n$	8
4.2	Le cas de la métrique riemannienne sur X	9
4.2.1	Choix du centre de projection	10
4.2.2	Définition des distances en jeu	11
4.2.3	Majoration de dist_p par dist	12
4.2.4	Relations entre dist_p et dist_{pc}	13
4.2.5	Relations entre dist_{pc} et dist_X	14
4.2.6	Bilan intermédiaire	19
4.2.7	Codimension de Σ	19
4.2.8	Volume d'un voisinage de Σ dans X	20
4.2.9	Évaluation finale du diamètre observable	22
4.2.10	Diamètre observable des sous-variétés algébriques de $\mathbb{C}P^n$	23
A	Annexe : la formule de Crofton	25
A.1	Explication	25
A.2	Longueurs et diamètres dans $\mathbb{C}P^1$	25
B	Annexe : quelques propriétés des polynômes complexes	26
C	Annexe : rappels de géométrie projective	30
C.1	Métrique projective	30
C.2	Dilatation par les projections	30
C.3	Longueur d'une courbe et de ses projetés	31
D	Annexe : évaluation de $\int (\cos t)^k dt$	32