Effondrement de quotients aléatoires de groupes hyperboliques avec torsion

Collapsing of random quotients of hyperbolic groups with torsion

Yann Ollivier

CNRS, UMPA, ENS de Lyon, 46 allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 7

Abstract

We show that random quotients of hyperbolic groups with "harmful" torsion collapse at densities smaller than expected. *To cite this article: Y. Ollivier, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).*

Résumé

Nous montrons que les quotients aléatoires de groupes hyperboliques à torsion « meurtrière » s'effondrent à des densités plus petites que prévu. *Pour citer cet article : Y. Ollivier, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).*

1. Résultats

Dans un groupe hyperbolique, « adding "sufficiently random" relations to a non-elementary word hyperbolic group gives us a word hyperbolic group again » (M. Gromov, [5], 5.5F). Cette intuition peut être formalisée dans un contexte déterministe (petite simplification relative : [1,3]) ou aléatoire. Cette dernière option, retenue dans [8], a l'avantage de permettre de quantifier très précisément le nombre de relations que l'on peut ajouter avant d'obtenir un groupe trivial.

Rappelons le modèle de quotient par des mots aléatoires à densité d. (On renvoie à [6,4,9] pour une discussion générale des groupes aléatoires.) Soit G_0 un groupe hyperbolique non élémentaire, engendré par des éléments $a_1, \ldots, a_m$, $m \geqslant 2$. Pour $0 \leqslant d \leqslant 1$, un *ensemble de mots aléatoires de longueur* ℓ *à densité* d est l'ensemble aléatoire R obtenu en tirant $(2m)^{d\ell}$ fois de suite un mot au hasard parmi les $(2m)^\ell$ mots de longueur ℓ en les $a_i^{\pm 1}$ (on peut aussi considérer seulement les mots réduits, voir [8]). Un *quotient aléatoire de* G_0 *à densité* d *et longueur* ℓ est le groupe $G = G_0/\langle R\rangle$ ainsi obtenu.

Email address: yann.ollivier@ens-lyon.fr (Yann Ollivier).

Preprint submitted to Elsevier Science *23 mars 2005*

On dit qu'une propriété de G survient *très probablement* si sa probabilité tend vers 1 lorsque $\ell \to \infty$, à d fixé. Le théorème suivant est extrait de [8] (théorème 4) :

Théorème 1.1 *Soit G_0 un groupe hyperbolique non élémentaire, à torsion inoffensive (voir ci-dessous), engendré par les éléments $a_1, \ldots, a_m$. Soit $(2m)^{-1/2} < \lambda(G_0) < 1$ le rayon spectral de l'opérateur de marche aléatoire simple sur G_0 engendré par $a_1^{\pm 1}, \ldots, a_m^{\pm 1}$, comme défini dans [7]. Soit $d_{crit} := -\log_{2m} \lambda(G_0) \in]0; 1/2[$. Alors :*

– *si $d < d_{crit}$, très probablement un quotient aléatoire de G_0 est hyperbolique non-élémentaire ;*

– *si $d > d_{crit}$, très probablement un quotient aléatoire de G_0 est le groupe trivial $\{e\}$.*

La définition suivante est introduite et discutée dans [8]. Elle est comparable à, mais moins exigeante que, la propriété de « centralisateurs cycliques » utilisée dans [2].

Définition 1.2 *Un groupe hyperbolique G est dit* à torsion inoffensive *si pour tout élément de torsion, son centralisateur est, ou cyclique, ou bien virtuellement $\mathbb{Z}$, ou encore égal à G.*

La raison de cette note est de montrer la nécessité de l'hypothèse de torsion inoffensive :

Théorème 1.3 *Le théorème 1.1 ne s'applique pas au groupe hyperbolique $G_0 = (F_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \star F_4$ (pris avec ses neuf générateurs naturels), où $\star$ désigne le produit libre. Plus précisément, il existe une densité $0 < d_{crit} < -\log_{18} \lambda(G_0)$, telle qu'en densité $d > d_{crit}$, les quotients aléatoires de G_0 sont très probablement triviaux.*

Nous donnons dans la discussion ci-après plus de détails sur le comportement des quotients aléatoires de G_0.

2. Démonstration

L'idée est qu'à partir d'une certaine densité dépendant de la taille du sous-groupe $F_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, le facteur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ deviendra central dans le quotient aléatoire. Au-dessus de cette densité, les quotients aléatoires se comporteront donc comme des quotients de $(F_4 \star F_4) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, groupe qui a une densité critique plus faible que $(F_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \star F_4$.

Fixons deux entiers strictement positifs n et p ; soient les deux groupes

$$G_1 := (F_n \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \star F_p \quad \text{et} \quad G_2 := (F_n \star F_p) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

et choisissons une famille génératrice (notée par abus de la même façon dans ces deux groupes), à savoir $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_p, u$, où bien sûr les a_i sont les générateurs standard du facteur F_n, les b_i les générateurs standard de F_p, et u engendre le facteur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

On vérifie aisément que les groupes G_1 et G_2 sont hyperboliques, non élémentaires.

Le rayon spectral du groupe libre F_k est, d'après [7], égal à $\sqrt{2k-1}/k$. Le lemme 4.1 de [7] donne le rayon spectral d'un produit direct, et on obtient $\lambda(F_k \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = (1 + k\lambda(F_k))/(1+k) = \left(1 + \sqrt{2k-1}\right)/(k+1)$. En conséquence de quoi

$$\lambda(G_2) = \left(1 + \sqrt{2n + 2p - 1}\right)/(n + p + 1)$$

et lorsque $n = p = 4$, on obtient $d_2 := -\log_{2(n+p+1)} \lambda(G_2) \approx 0,212$.

On montre maintenant que $\lambda(G_1) < \lambda(G_2)$. L'inégalité large découle bien sûr du fait que G_2 est un quotient de G_1. D'après le théorème 1 de [7], le rayon spectral augmente strictement lors d'un quotient d'un groupe par (la clôture normale d') un sous-groupe non moyennable. Le noyau de l'application quotient $G_1 \to G_2$ contient par construction les deux commutateurs $ub_1u^{-1}b_1^{-1}$ et $ub_2u^{-1}b_2^{-1}$ (si $p \geqslant 2$). Il est facile de vérifier que ces derniers engendrent un sous-groupe libre de rang 2 dans G_1, sous-groupe qui est donc non moyennable d'où l'affirmation.

Nous allons montrer que pour $n = p = 4$, les quotients aléatoires de G_1 sont très probablement triviaux dès que $d > d_2$. Comme $d_1 := -\log_{2(n+p+1)} \lambda(G_1) > d_2$, le théorème 1.1 contredirait ce fait.

Soit R un ensemble de $18^{d\ell}$ mots de longueur ℓ en $u, a_1, \ldots, a_4, b_1, \ldots, b_4$ et leurs inverses, choisis au hasard parmi les 18^ℓ possibles, suivant la définition d'un quotient aléatoire à densité d. Passons à l'étude du quotient $G_1/\langle R\rangle$.

Soit C le sous-groupe de G_1 engendré par $u, a_1, \ldots, a_4$, et évaluons la probabilité qu'il existe un $r \in R$ qui appartienne à C. Le nombre de mots de longueur ℓ appartenant à C est au moins 10^ℓ (tous les mots en $u, a_1, \ldots, a_4$ et leurs inverses). La probabilité qu'un mot aléatoire appartienne à C est donc minorée par $(10/18)^\ell$. Par conséquent si le cardinal de R est beaucoup plus grand que $(18/10)^\ell$, très probablement l'un des éléments de R appartiendra à C. Par définition du modèle, ceci se produit lorsque $18^{d\ell} \gg (18/10)^\ell$ pour $\ell \to \infty$, soit dès que $d > d_C := 1 - \log_{18} 10 \approx 0,203$. À noter que $d_C < d_2$. Notons aussi pour plus tard que $d_C > 0$ car $G_1/\langle C\rangle = F_p$ n'est pas moyennable (critère de [7]).

On sait donc que si $d > d_C$ (ce que l'on suppose désormais), très probablement l'ensemble R contient un élément de C. Le même argument de décompte montre que, pour chaque x dans l'ensemble (fini !) $\{u, a_1, \ldots, a_4, b_1, \ldots, b_4\}$, l'ensemble R contient très probablement un mot de la forme xc où c est un mot de longueur $\ell - 1$ appartenant à C.

Soit $H = G_1/\langle R\rangle$ le quotient aléatoire à étudier. Soit $r = xc \in R$ avec $c \in C$. Par définition de C, dans G_1 les éléments u et c commutent, et donc dans H on a

$$uxu^{-1}x^{-1} =_{G_1} uxcu^{-1}c^{-1}x^{-1} =_{G_1} uru^{-1}r^{-1} =_H e$$

car, dans H, on a $r = e$ par définition.

Comme, pour $d > d_C$, un tel r existe pour tous les générateurs x de G_1, on en déduit que u commute avec tous les générateurs de H et est donc central dans H. Soit ainsi $S \subset G_1$ l'ensemble de ces commutateurs $\{[u, x]\,;\, x \in \{u, a_1, \ldots, a_4, b_1, \ldots, b_4\}\}$, on a

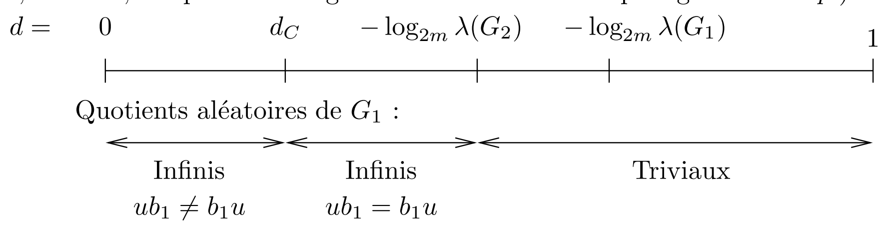
$$H = G_1/\langle R\rangle = G_1/\langle R \cup S\rangle = (G_1/\langle S\rangle)/\langle R\rangle = G_2/\langle R\rangle$$

Mais $G_2/\langle R\rangle$ est un quotient aléatoire de G_2 (en effet la notion de quotient par des mots aléatoires ne dépend pas du groupe considéré mais seulement d'un ensemble de symboles formant les mots). Le groupe G_2 étant à torsion inoffensive (le centralisateur de u est G_2 tout entier), le théorème 1.1 s'y applique, et donc ses quotients aléatoires sont triviaux dès que $d > d_2$.

Par conséquent, dès que $d > \max(d_C, d_2) = d_2$, et non seulement pour $d > d_1$, les quotients aléatoires de G_1 sont triviaux, ce qui était à démontrer.

3. Discussion

Résumons le comportement des quotients aléatoires de G_1. Pour $0 \leqslant d < d_C \approx 0,203$, on peut montrer que les axiomes de [8] sont satisfaits et que donc les quotients aléatoires se comportent comme décrit dans [8]. Mais pour $d > d_C$, l'axiome 4 de [8] est mis en défaut et les quotients aléatoires de G_1 se comportent comme ceux de G_2, et sont donc triviaux pour $d > d_2 \approx 0,212$ au lieu d'une valeur plus grande attendue. (L'écart entre $0,203$ et $0,212$ peut être augmenté en choisissant de plus grands n et p.)



Les deux phases $d < d_C$ et $d > d_C$ sont réellement différentes : dans la seconde, la relation $ub_1 = b_1u$ a lieu comme dans G_2, alors qu'elle est fausse dans la première (en effet dans cette phase les axiomes de [8] tiennent et donc le rayon d'injectivité du quotient tend vers l'infini avec ℓ) ; il y a donc une différence observable dans la boule de rayon 1 du graphe de Cayley.

On peut sans aucun doute arranger plus de trois phases en utilisant des groupes tels que

$$(((F_m \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \star F_p) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \star F_q$$

avec plusieurs densités critiques correspondant aux densités des centralisateurs des différents éléments de torsion.

Il serait intéressant de disposer d'un critère général explicitant dans quels cas la torsion, de non inoffensive, devient « meurtrière » au sens où elle modifie la densité critique. La variable pertinente est sans doute l'exposant asymptotique avec lequel la marche aléatoire voit le centralisateur des éléments de torsion : si cet exposant est supérieur à l'exposant avec lequel elle voit l'élément neutre (qui est $\log \lambda$), alors le quotient aléatoire sera sans doute trop tôt trivial. De même, une théorie similaire utilisant des exposants de croissance plutôt que de cocroissance permettrait d'obtenir des contre-exemples dans le cadre du modèle dit géodésique de quotient aléatoire (théorème 3 de [8]).

Remerciements

Je tiens à remercier Étienne Ghys qui relut et transmit cette note, ainsi que, tout particulièrement, A. Ol'shanskiĭ qui me signala une erreur dans une version préliminaire de [8] où l'hypothèse de torsion inoffensive n'apparaissait pas.

Références

[1] Ch. Champetier, Petite simplification dans les groupes hyperboliques, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math., ser. 6, vol. 3 (1994), n° 2, 161–221.

[2] Ch. Champetier, L'espace des groupes de type fini, Topology 39 (2000), n° 4, 657–680.

[3] T. Delzant, Sous-groupes distingués et quotients des groupes hyperboliques, Duke Math. J. 83 (1996), n° 3, 661–682.

[4] É. Ghys, Groupes aléatoires, séminaire Bourbaki 916 (2003).

[5] M. Gromov, Hyperbolic groups, in Essays in group theory, ed. S. M. Gersten, Springer (1987), 75–265.

[6] M. Gromov, Asymptotic invariants of infinite groups, in Geometric group theory, eds. G. Niblo, M. Roller, Cambridge University Press, Cambridge (1993).

[7] H. Kesten, Symmetric random walks on groups, Trans. AMer. Math. Soc. 92 (1959), 336–354.

[8] Y. Ollivier, Sharp phase transition theorems for hyperbolicity of random groups, GAFA, Geom. Funct. Anal. 14 (2004), n° 3, 595–679.

[9] Y. Ollivier, A January 2005 invitation to random groups, expository manuscript.