Diagrammes, enchevêtrements et applications

25 octobre 2001

1 Algèbres de diagrammes

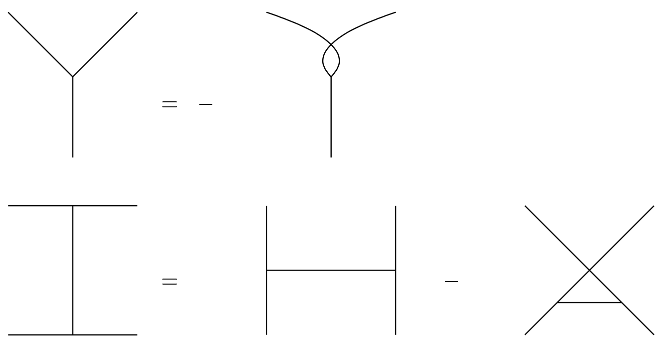
1.1 Définitions

Soit Γ une variété de dimension 1 (avec éventuellement un bord). On appelle diagramme de support Γ un graphe sans boucles constitué de sommets trivalents et de sommets monovalents qui s'appuient sur Γ. On suppose de plus que les arêtes arrivant sur un sommet sont munies d'un ordre cyclique.

Un tel diagramme est représenté par un dessin plan, où Γ apparaît d'un trait plein, et le graphe apparaît en pointillés. L'ordre cyclique des arêtes incidentes à un sommet est donné par le sens trigonométrique du plan.

À chaque diagramme est associé un degré qui est la moitié des sommets du graphe.

On note alors $\mathcal{A}^f(\Gamma)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel ayant les diagrammes de support Γ pour base, quotienté par les relations suivantes (qui sont des relations locales)



(AS)

(IHX)

FIG. 1: Relations entre les diagrammes

$\mathcal{A}^f(\Gamma)$ est donc un espace vectoriel gradué, et on note $\mathcal{A}(\Gamma)$ sa complétion relativement à cette graduation. L'invariant universel de Vassiliev-Kontsevitch est à valeur dans $\mathcal{A}(\emptyset)$.

1.2 Structures algébriques

Si $\Gamma = \emptyset$, l'union disjointe des diagrammes induit sur $\mathcal{A}^f(\Gamma)$ et $\mathcal{A}(\Gamma)$ une structure d'algèbre commutaive compatible avec la graduation. De même, si Γ est formé de p copies de l'intervalle $[0,1]$, la mise bout à bout des intervalles munit $\mathcal{A}^f(\Gamma)$ et sa complétion d'une structure d'algèbre. On note $\mathcal{A}(p)$ cette algèbre : elle est commutative si et seulement si $p = 1$.

Ceci provient du lemme suivant :

Lemme 1. *L'inclusion de $[0,1]$ dans S^1 fournit un morphisme de $\mathcal{A}(1)$ dans $\mathcal{A}(S^1)$ qui se trouve être un isomorphisme.*

◃ L'application $\varphi : \mathcal{A}([0,1]) \to \mathcal{A}(S^1)$ est définie pour un diagramme s'appuyant sur $[0,1]$ en recollant les deux extrémités, puis on l'étend par linéarité. Elle est compatible avec les relations (AS) et (IHX). Pour montrer qu'elle est bijective, on construit l'inverse d'un diagramme s'appuyant sur le cercle en coupant ce dernier entre deux sommets (voir figure 2)

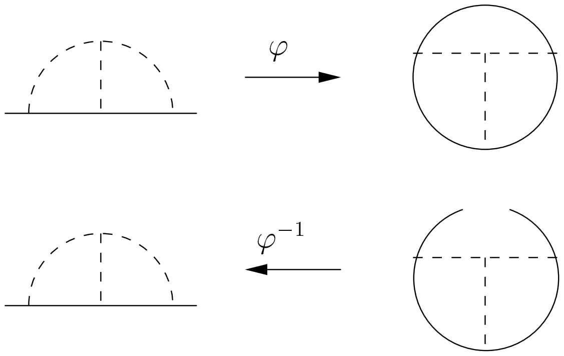


Fig. 2: Isomorphisme entre $\mathcal{A}([0,1])$ et $\mathcal{A}(S^1)$

Pour que cette application soit bien définie, il faut que le diagramme ainsi obtenu ne dépende pas du point du cercle ou on le "coupe". Considérons donc un diagramme D s'appuyant sur $[0,1]$ et D' le même diagramme où on a enlevé la patte de gauche que l'on a mise à droite. Il faut montrer que dans $\mathcal{A}([0,1])$, $D = D'$.

Pour cela, on libère la patte gauche et on la recolle comme sur la figure 3 sur chaque ergot, puis on fait la somme. Si on groupe cette somme par arêtes, on obtient les trois termes du dessin puisque les autres s'annulent par (AS). Si on les regroupe par sommets, on obtient 0 par applications de la relation (IHX).

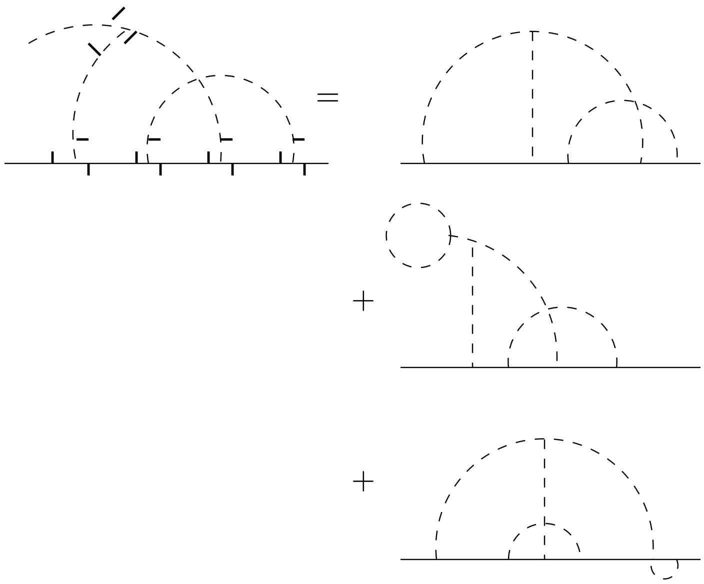


Fig. 3: Egalité dans $\mathcal{A}([0,1]$

Ainsi, la somme des trois dessins de droite est nulle. Le dessin du milieu est nul par application de (AS) sur la base de la boucle, et le dernier dessin est égal à l'opposé de celui obtenu en changeant l'orientation du dernier sommet. L'égalité du premier et dernier graphe montre alors le lemme.▹

Ceci implique que l'algèbre $\mathcal{A}([0,1])$ est commutative puisque si deux diagrammes D_1 et D_2 s'appuient sur $[0,1]$, leur produit aussi et $\varphi(D_1D_2) \in \mathcal{A}(S^1)$. On peut alors faire glisser l'un des deux graphes le long du cercle pour transformer $\varphi(D_1D_2)$ en $\varphi(D_2D_1)$. Comme φ est un isomorphisme, cela prouve bien que $D_1D_2 = D_2D_1$.

1.3 Fonctorialité par rapport aux fonctions continues

L'isomorphisme $\varphi : \mathcal{A}([0,1]) \to \mathcal{A}(S^1)$ provient de l'inclusion $[0,1] \to S^1$: de manière plus générale, la transformation $X \mapsto \mathcal{A}(X)$ est fonctorielle par rapport aux inclusions.

On dispose aussi d'une fonctorialité contravariante par rapport à toute application continue entre variétés de dimension 1 qui respecte les bords.

Proposition 1. *Soit f une application continue de X dans Y respectant les bords. Alors f induit une application linéaire f^* de $\mathcal{A}(Y) \to \mathcal{A}(X)$ qui respecte le degré. De plus la transformation $f \mapsto f^*$ est fonctorielle.*

$\triangleleft$ On commence par construire $f^*(D)$ pour un graphe D qui s'appuie sur Y. On suppose (par approximation) que f est différentiable. D'après le lemme de Sard, l'ensemble des valeurs critiques de f est de mesure nulle : on peut donc supposer que les sommets de D qui s'appuient sur Y le font en des valeurs régulières $y_1, \ldots, y_n$.

Soit h un relèvement de f au niveau des valeurs $y_1, \ldots, y_n$. On construit un graphe D_h s'appuyant sur X en collant la patte arrivant en y_i sur $h(y_i)$, avec une orientation compatible (induite par la différentielle de f). On pose alors

$$f^*D = \sum_h D_h$$

Il faut alors voir que cette application ne dépend pas des choix, qu'elle est compatible avec les relations (AS) et (IHX), puis qu'elle est fonctorielle.

Le fait que cette application ne dépende pas de la classe d'homotopie de f provient de la relation (AS) : si f a localement pour graphe ou , une patte qui s'appuie sur la valeur moyenne de f aura pour image réciproque la somme de 3 diagrammes dont deux s'annulent par la relation (AS). Ceci prouve que f est bien définie.

Comme f^* ne dépend pas de la classe d'homotopie de f, on peut supposer que c'est un revêtement. Il est alors clair que l'image réciproque d'une relation (AS) et (IHX) est une somme de relations (AS) et (IHX) respectivement. La fonctorialité est claire puisque les antécédents de $g \circ f$ sont les antécédents par g des antécédents par f des valeurs régulières $y_1, \ldots, y_n$. $\triangleright$

1.4 Comultiplication et structure d'algèbre de Hopf

Soit X une variété de dimension 1 : $\mathcal{A}(X)$ est naturellement muni d'une structure de coalgèbre de la manière suivante : soit D un diagramme s'appuyant sur X. $D \setminus X$ a un nombre fini de composantes connexes $D_1, \ldots, D_n$. Pour chaque sous ensemble I de ces composantes, on construit un diagramme $D_I = X \cup \bigcup_{i \in I} D_i$. On pose alors

$$\Delta(D) = \sum_{I \amalg J = \{1, \ldots, n\}} D_I \otimes D_J$$

Proposition 2. *Une telle construction passe au quotient et fournit une comultiplication sur $\mathcal{A}(X)$ qui repecte le degré.*

$\triangleleft$ La seule chose à vérifier est que Δ transforme une relation (IHX) en une relation (IHX). Ceci est clair sauf si cette relation fait intervenir un élément de X et deux diagrammes disjoints (après avoir enlevé X) : voir figure 4.

Soit D_1 le sous graphe de $D \setminus X$ qui contient la patte du haut et D_2 celui qui contient la patte du bas.

Dans l'expression de $\Delta(D)$ interviennent 4 types de partitions suivant où se trouvent les diagrammes D_1 et D_2. Si ces diagrammes sont dans des parties différentes, on ne peut plus distinguer les diagrammes

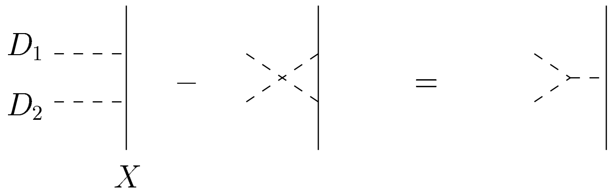


FIG. 4: Relation (STU)

intervenant dans les deux termes du membre de gauche et les deux contributions s'annulent. Sinon, il reste toutes les partitions où D_1 et D_2 sont du même côté : elles correspondent bijectivement aux partitions du diagramme apparaissant dans le membre de droite. L'image de la relation (STU) par Δ s'écrit donc comme une somme de produits tensoriels de diagrammes où apparaît à chaque fois la relation (STU). Ceci montre bien que Δ passe au quotient : $\Delta : \mathcal{A}(X) \to \mathcal{A}(X) \otimes \mathcal{A}(X)$.

Il est évident que cette comultiplication est coassociative et cocommutative et qu'elle préserve le degré.$\triangleright$

L'application $\varepsilon : \mathcal{A}(X) \to \mathbb{C}$ de projection sur la composante de degré 0 (le graphe vide) est une counité.

On remarque que $D \setminus X$ est connexe si et seulement si D est primitif, en particulier les éléments primitifs de $\mathcal{A}(\emptyset)$ sont les graphes connexes.

Rappelons qu'on avait construit une structure d'algèbre sur $\mathcal{A}(p)$ pour $p \geq 0$. On peut vérifier que ces structures sont compatibles avec la structure naturelle de coalgèbre : ce sont mêmes des algèbres de Hopf. Elles sont commutatives si et seulement si $p = 0$ ou 1.

2 Intégrale de Kontsevich

2.1 Intégrale d'une tresse

Soit γ une tresse, c'est à dire une application de $[0, 1]$ dans $\mathbb{C}^p$: $\gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_p)$ telle que pour tout $t \in [0, 1]$, $\gamma_i(t) \neq \gamma_j(t)$ si $i \neq j$.

On veut définir l'intégrale de Kontsevitch de cette tresse comme étant à valeurs dans $\mathcal{A}(p)$, et telle que si deux tresses γ et δ vérifient $\gamma(1) = \delta(0)$, l'intégrale associée à la composition des deux tresses soit égale au produit des deux intégrales. On veut aussi que cette intégrale soit indépendante de la classe d'isotopie de la tresse.

Une façon géométrique de définir cette intégrale est de prendre l'holonomie d'une connexion plate sur un espace de configurations à p points. Précisons un peu ceci :

Notons $\mathcal{C}_p = \{(z_1, \cdots, z_p) \in \mathbb{C}^p$ deux à deux distincts$\}$. Une tresse est un chemin dans $\mathcal{C}_p$.

Considérons la forme dite de Knizhnik-Zamolodchikov définie par

$$\Omega = \frac{1}{2i\pi} \sum_{\{i,j\}} \frac{dz_i - dz_j}{z_i - z_j} \Gamma_{i,j}$$

Où $\Gamma_{i,j}$ est le diagramme obtenu en joignant les arêtes i et j par un arc pointillé comme sur la figure 5.

Ω est une 1-forme à valeurs dans $\mathcal{A}(p)$ et définit une connexion sur le fibré trivial $\mathcal{C}_p \times \mathcal{A}(p) \to \mathcal{C}_p$ par la formule $\nabla_V X = d_V(X) - \Omega(V)X$.

On note $Z(\gamma)$ le transport parallèle entre 0 et 1 le long de γ du diagramme trivial $1_{||\dots|}$. Cette quantité est indépendante de la classe d'isotopie du chemin si et seulement si la connexion de Kizhnik-Zamolodchikov est de courbure nulle, ce qui est le cas :

Proposition 3. $d\Omega + [\Omega, \Omega] = 0$

$\triangleleft$ Comme $\dfrac{\mathrm{d}z_i - \mathrm{d}z_j}{z_i - z_j} = \mathrm{dLog}(z_i - z_j)$, $\mathrm{d}\Omega = 0$. Il reste à calculer $[\Omega, \Omega]$:

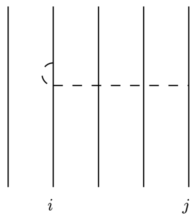


FIG. 5: Diagrammes élémentaires $\Gamma_{i,j}$

$$[\Omega,\Omega] = \sum_{\{i,j\},\{k,l\}} \frac{\mathrm{d}z_i - \mathrm{d}z_j}{z_i - z_j} \wedge \frac{\mathrm{d}z_k - \mathrm{d}z_l}{z_k - z_l} \Gamma_{i,j}\Gamma_{k,l}.$$

Si les paires $\{i,j\}$ et $\{k,l\}$ sont disjointes, $\Gamma_{i,j}$ et $\Gamma_{k,l}$ commutent, et l'antisymétrie du produit exterieur fait que les deux occurences de ces paires s'annulent. Si les paires sont égales, les termes s'éliminent comme précédemment. On regroupe alors la somme par triplets $\{i,j,k\}$ où les paires d'indices qui interviennent ont un indice en commun.

Le terme à prendre en compte est alors

$$\mathrm{dLog}(z_i - z_j) \wedge \mathrm{dLog}(z_j - z_k) \, [\Gamma_{i,j}\Gamma_{j,k} - \Gamma_{j,k}\Gamma_{i,j}] + \cdots$$

La relation IHX permet d'exprimer le commutateur ci-dessus à l'aide d'un graphe trivalent $\Gamma_{i,j,k}$ s'appuyant sur les trois brins. Dans l'expression ci-dessus, ce diagramme vient donc se mettre en facteur de $\mathrm{dLog}(z_i - z_j) \wedge \mathrm{dLog}(z_j - z_k) + \mathrm{dLog}(z_j - z_k) \wedge \mathrm{dLog}(z_k - z_i) + \mathrm{dLog}(z_k - z_i) \wedge \mathrm{dLog}(z_i - z_j) = 0.$▷

2.2 Configurations de points

Le but de l'intégrale de Kontsevich est de construire un invariant de nœuds (en bande) et plus généralement, un invariant d'enchevêtrements : on appelle enchevêtrement un plongement de copies de S^1 et $[0,1]$ dans $\mathbb{C} \times [0,1]$ (éventuellement en bandes) qui respectent les bords. Les enchevêtrements forment une catégorie dont les objets sont les parties finies de $\mathbb{C}$. On a déjà construit avec l'intégrale de Kontsevich un foncteur de la sous-catégorie des tresses (qui a les mêmes objets) vers une catégorie de diagrammes. Malheureusement, ce foncteur ne s'étend pas tel quel à la catégorie des enchevêtrements et il faut en premier lieu considérer comme objets certaines limites de configurations, et montrer que Z passe à la limite.

Définition 1. *Soit $n > 1$. On appelle configuration de taille n un couple (T,f) où :*
- *T est un arbre ayant une racine distinguée, possédant n feuilles et tel que chaque nœud ait au moins deux fils.*
- *f est une fonction de l'ensemble des arêtes de T dans $\mathbb{C}$ qui assigne aux fils de chaque nœud des valeurs différentes.*

Si $n = 1$, on appelle configuration la donnée d'un nombre complexe.

On note $\mathcal{X}_n$ l'ensemble de ces configurations.

A priori, l'ensemble des configurations est une réunion disjointe d'ouverts de $\mathbb{C}^m$ avec $m \geq n$ mais on "recolle" certaines configurations comme indiqué sur la figure 6.

Une façon plus précise de décrire l'ensemble des configurations revient à éclater les configurations dès que deux fils d'un même nœud prennent des valeurs voisines, puis à recoller chaque composante éclatée comme indiqué sur la figure. Notons que l'on obtient de cette façon une famille de configurations limites Y_n que l'on n'admet pas comme configurations admissibles.

L'interprétation d'une configuration est la suivante : les fils de la racine correspondent aux positions macroscopiques données par la fonction f : chaque sous-arbre décrit la situation microscopique au niveau du fils correspondant. Le mouvement décrit sur la figure est donc un passage du microscopique au macroscopique (et inversement).

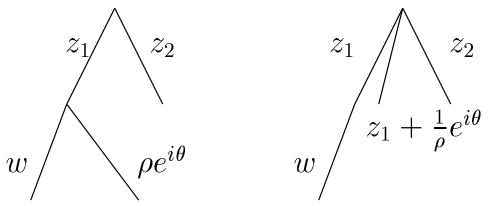


FIG. 6: Recollements entre configurations quand $\rho \to \infty$

Grâce à cette interprétation, on peut distinguer deux types de configurations :

- Les configurations standard correspondent aux arbres dont n branches partent de la racine. Ces configurations sont en bijection avec l'ensemble $\mathcal{C}_n$ considéré précédemment.
- Les configurations limites correspondent aux arbres dont chaque nœud possède exactement deux fils paramétrés par les complexes 0 et 1. Ces configurations sont paramétrées par les parenthésages de $\{1, \ldots, n\}$.

2.3 La connexion Ω

Il s'agit maintenant d'étendre la définition de Ω à $\mathcal{X}_n$: pour cela on introduit les notation suivantes. Soit $(T, f) \in \mathcal{X}_n$ et i, j deux feuilles de T. On note $z^i_{i,j}$ la valeur assignée par f à la branche partant vers i du premier ancêtre commun de i et j.

On pose alors

$$\Omega = \frac{1}{2i\pi} \sum_{\{i,j\} \text{ feuilles de } T} \frac{dz^j_{i,j} - dz^i_{i,j}}{z^j_{i,j} - z^i_{i,j}} \; \Gamma_{i,j}$$

Proposition 4. *Comme précédemment,* $d\Omega + \Omega \wedge \Omega = 0$

$\triangleleft$ Il est clair que $d\Omega = 0$. Il reste à évaluer le terme

$$\Omega \wedge \Omega = \frac{1}{(2i\pi)^2} \sum_{\{i,j\},\{k,l\}} \frac{dz^j_{i,j} - dz^i_{i,j}}{z^j_{i,j} - z^i_{i,j}} \wedge \frac{dz^l_{k,l} - dz^k_{k,l}}{z^l_{k,l} - z^k_{k,l}} \; \Gamma_{i,j}\Gamma_{k,l}$$

Si les paires $\{i,j\}$ et $\{k,l\}$ sont égales ou disjointes, les termes s'annulent. Il reste à faire pour chaque triplet i, j, k une somme de trois termes circulaires qui se mettent en facteur d'un même diagramme comme précédemment.

Si les trois paires $\{i,j\}$, $\{j,k\}$ et$\{k,i\}$ ont le même premier ancêtre commun, alors on tombe dans le cas déjà traité. Sinon, on peut supposer que i et j ont pour premier ancêtre commun un descendant du premier ancêtre commun de i ou j et k. Dans les notations de la figure 7, le terme qui intervient est alors

$$\frac{dz_j - dz_i}{z_j - z_i} \wedge \frac{dw - dz}{w - z} + \frac{dw - dz}{w - z} \wedge \frac{dw - dz}{w - z} + \frac{dw - dz}{w - z} \wedge \frac{dz_j - dz_i}{z_j - z_i} = 0$$

$\triangleright$

Pour tout chemin γ dans $\mathcal{X}_n \cup Y_n$ coupant Y_n transversalement, on associe un élément de $\mathcal{A}(n)$ de la manière suivante : pour chaque t_i tel que $\gamma(t_i) \in Y_n$ on associe deux points $\gamma(t_i)_{+\varepsilon}$ et $\gamma(t_i)_{-\varepsilon}$ comme sur la figure 6. On définit alors $Z(\gamma)$ par la formule

$$Z(\gamma) = \lim_{\varepsilon \to 0} \prod_i Z(\gamma(t_i)_{+\varepsilon}, \gamma(t_{i+1})_{-\varepsilon})$$

Proposition 5. *La limite définie ci-dessus converge et définit une quantité multiplicative ($Z(\gamma\delta) = Z(\gamma)Z(\delta)$). De plus, Z est stable par homotopie (qui reste transversale à Y_n).*

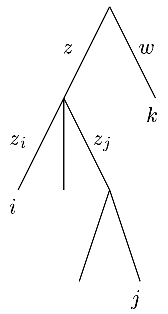


FIG. 7: Calcul de la courbure

$\triangleleft$ On évalue le coût d'un trajet de $X = (z(z_1, \dots, z_m, \frac{1}{\rho}e^{i\theta}), y_1, \dots, y_M)$ à

$Y = (z(z_1, \dots, z_m), \rho e^{i\theta}, y_1, \dots, y_M)$ par les deux étapes suivantes :

$X(\varepsilon) = (z(z_1, \dots, \frac{1}{\varepsilon}e^{i\theta}), y_1, \dots)$ et $Y(\varepsilon) = (z(z_1, \dots), \varepsilon e^{i\theta}, y_1, \dots)$.

Comme tous les points sont immobiles sauf un, si X est lui même un sous-arbre d'une configuration, cela ne changera rien au calcul de Z. On peut donc supposer que ce n'est pas le cas. De même si $z_1, \dots, z_m$ ou $y_1, \dots, y_M$ sont des arbres, il suffit de remplacer dans l'expression de Z $\Gamma_{x,z}$ par la somme des $\Gamma_{x,z'}$ pour z' feuille descendant de z. Dans le calcul, on suppose donc que chaque z_i ou y_i est seul.

On prend alors pour chemin la ligne droite entre X et $X(\varepsilon)$ puis entre $Y(\varepsilon)$ et Y (les autres points restent immobiles). On note Z_ε l'intégrale correspondante. Par définition, $Z = \lim_{\varepsilon \to 0} Z_\varepsilon$.

On appelle x la feuille qui se déplace. Elle est la seule à interagir avec les autres. De plus pendant la première partie du trajet, elle n'interagit qu'avec les z_i, puis avec les y_i et avec les z_i mais par l'intermédiaire de z.

Soit $\Sigma = \sum_i \Gamma_{i,x}$. On veut montrer que la première quantité se comporte comme $e^{-\frac{\log \varepsilon}{2i\pi}\Sigma}$.

Pour cela, on utilise l'astuce suivante : dans ce calcul n'interviennent que les points x et z_i. Il est clair que la première partie du trajet que l'on note $Z_1(\varepsilon)$ ne fait intervenir aucun terme contenant Γ_{z_i,z_j}. Notons π l'application de $\mathcal{A}(n) \to \mathcal{A}(n)$ qui envoie tout diagramme connectant z_i et z_j sur 0. C'est un projecteur qui vérifie $\pi(Z_1(\varepsilon)) = Z_1(\varepsilon)$, doublé d'un morphisme d'algèbre. De plus, après application de π, les points z_i n'interagissent plus entre eux. On n'a donc pas à se soucier des problèmes de convergence. On décompose le mouvement $X \to X(\varepsilon)$ en trois étapes :
- Rassemblement des z_i en 0 : coût A.
- Éloignement de x : coût $e^{\frac{\log \frac{\rho}{\varepsilon}}{2i\pi}\Sigma}$.
- Retour des z_i dans leur position initiale : coût B_ε.

Comme la courbure est nulle et que les deux chemins considérés sont homotopes, on a $Z_1(\varepsilon) = \pi(B_\varepsilon)e^{\frac{\log \frac{\rho}{\varepsilon}}{2i\pi}\Sigma}\pi(A)$.

Il reste à évaluer $\pi(B_\varepsilon)$.

Pour cela, on utilise une formule intégrale :

$$\pi(B_\varepsilon) = \sum_{m \geq 0} \frac{1}{(2i\pi)^m} \sum_{i_1, \dots, i_m} \int_{0<t_1<\dots<t_m<1} \prod_{l=1}^{m} \frac{dt_l z_{i_l}}{t_l z_{i_l} - \frac{e^{i\theta}}{\varepsilon}} \Gamma_{i_m,x} \cdots \Gamma_{i_1,x}$$

Il existe une constante C telle que $\left| \frac{z_{i_l}}{t_l z_{i_l} - \frac{e^{i\theta}}{\varepsilon}} \right| \leq C\varepsilon$. Le coefficient de $\Gamma_{i_m,x} \cdots \Gamma_{i_1,x}$ est donc inférieur en valeur absolue à $\frac{C^m \varepsilon^m}{(2\pi)^m m!}$, ce qui démontre que l'équivalent est le bon, comme $\varepsilon^m (\log \varepsilon)^k \to 0$ quand

$\varepsilon \to 0$ et $m > 0$.

La même méthode ne s'applique pas pour le calcul de Z_2. On suppose ici que z n'a pas de fils puisque sinon, il suffit de remplacer dans l'expression de Z_2 toute patte s'appuyant sur z par la somme des pattes s'appuyant sur les fils de z. On veut voir que la quantité Z_2 se comporte comme $e^{\frac{\log \varepsilon}{2i\pi}\Gamma_{z,x}}$

On montre alors que $D_\varepsilon = {Z_2}^{-1} e^{\frac{\log \varepsilon}{2i\pi}\Gamma_{z,x}}$ converge quand $\varepsilon \to 0$.

Calculons dans cette expression le coefficient du terme $\Gamma_{i_m,x}\cdots\Gamma_{i_1,x}$ avec $i_1 = \ldots = i_r = z$ et $i_{r+1} \neq z$. Les r premiers termes peuvent provenir de l'exponentielle ou de ${Z_2}^{-1}$. Ce coefficient que l'on note c est donc égal à

$$\frac{1}{(2i\pi)^m} \sum_{k=0}^{r} \frac{(\log \varepsilon)^k}{k!} \int_{\varepsilon < t_{k+1} < \cdots < t_m < \rho} \prod_{l=k+1}^{m} \frac{dt_l e^{i\theta}}{z + t_l e^{i\theta} - y_{i_l}}.$$

Comme $y_{t_{k+1}} = \cdots = y_{t_r} = z$, on peut intégrer ces variables et faire apparaître

$$c = \frac{1}{(2i\pi)^m} \sum_{k=0}^{r} \frac{(\log \varepsilon)^k}{k!} \int_{\varepsilon < t_{r+1} < \cdots < t_m < \rho} \frac{(\log \frac{t_{r+1}}{\varepsilon})^{r+1-k}}{(r+1-k)!} \prod_{l=r+1}^{m} \frac{dt_l e^{i\theta}}{z + t_l e^{i\theta} - y_{i_l}}.$$

On pose $h = t_{r+1}$.

$$c = \frac{1}{(2i\pi)^m} \int_{\varepsilon < h < \rho} \sum_{k=0}^{r} \frac{(\log \varepsilon)^k}{k!} \frac{(\log \frac{h}{\varepsilon})^{r-k}}{(r-k)!} \int_{h < t_{r+2} < \cdots < t_m < \rho} \frac{dh e^{i\theta}}{z + h - y_{i_l}} \prod_{l=r+2}^{m} \frac{dt_l e^{i\theta}}{z + t_l e^{i\theta} - y_{i_l}}.$$

Grâce à la formule du binôme, la somme qui se met en facteur vaut $\frac{(\log h)^r}{r!}$.

Il existe une constante C telle que $|\dfrac{e^{i\theta}}{z + t_l e^{i\theta} - y_{i_l}}| < \frac{C}{t_l}$ et $|\dfrac{e^{i\theta}}{z + t_l e^{i\theta} - y_{i_{r+1}}}| < C$. On peut donc majorer l'intégrale multiple par $C^m \frac{(\log \frac{\rho}{h})^{m-r-1}}{(m-r-1)!}$. À une constante près, le terme sous l'intégrale est majorable par $|\log h|^{m-1}$ qui est intégrable en 0. Ceci prouve que c a une limite finie quand $\varepsilon \to 0$. $\triangleright$

2.4 Extension aux enchevêtrements

Considérons la catégorie dont les objets sont les configurations limites et les morphismes sont les entrelacs en bande qui s'appuient sur ces configurations : on note $\mathcal{T}$ cette catégorie. C'est une catégorie monoïdale : Considérons deux tresses entre configurations limites de taille n_1 et n_2. Ce sont des fonctions γ_1 et γ_2 de $[0,1]$ dans $\mathcal{X}_{n_1}$ et $\mathcal{X}_{n_2}$. La tresse $\gamma(t)$ obtenue à partir de l'arbre ${}_0\Lambda_1$ en recollant sur chacun des fils les arbres γ_1 et γ_2 est une tresse entre les configurations produit. Ceci définit une structure de catégorie monoïdale sur $\mathcal{E}$. Il est de plus évident d'après la définition de Z que $Z(\gamma) = Z(\gamma_1) \otimes Z(\gamma_2)$.

Il y a une structure en bande canonique sur une tresse (on déclare qu'une tresse est épaissie suivant le vecteur normal i). Le foncteur Z construit ci-dessus définit un foncteur de la sous-catégorie des tresses en bande dans l'algèbre $\mathcal{A}(n)$ où n est le nombre de points de la tresse.

Considérons la catégorie $\mathcal{D}$ suivante. Ses objets sont les ensembles finis et ses morphismes les ensembles $\mathcal{D}(X,Y)$ formés des couples (Γ, u) où Γ est un cobordisme (non orienté) entre X et Y, et u est un élément de $\mathcal{A}(\Gamma)$.

On note F le foncteur d'oubli de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{C}$ (qui oublie donc la structure en bande, le plongement et le parenthésage).

On veut étendre Z en un foncteur de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{C}$ de telle sorte que l'image de T soit de la forme $(F(T), Z(T))$.

Pour cela, il suffit de définir $Z(\cap)$ et $Z(\cup)$ avec leur structure en bande et parenthésage évidents.

Soit f l'application $t \mapsto 1-t$ de $[0,1]$ dans lui-même. On dit qu'un élément ν est symétrique si $f^*\nu = \nu$. Pour des raisons de symétrie, on demande que $Z(\cap) = \nu 1_\cap$ et $Z(\cup) = \nu 1_\cup$.

Considérons l'élément de la figure 8 que l'on appelle associateur :

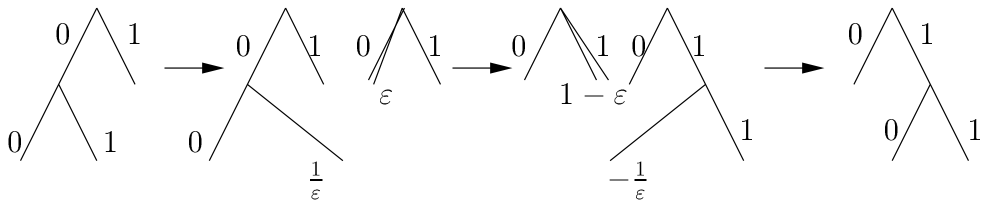


FIG. 8: Définition de l'associateur Φ

On notera aussi $\Phi = Z(|/|)$. Si on "bouche" l'associateur avec les enchevêtrements $\bigcup|$ et $|\bigcap$, on obtient $1_|$ grâce à l'invariance de Z par homotopie. La commutativité de $\mathcal{A}([0,1])$ fait que l'on peut "sortir" les facteurs ν. On obtient $\nu^2 1_{|\bigcap}\Phi 1_{\bigcup|} = 1_|$.

Définition 2. *On pose alors* $\nu = (1_{|\bigcap}\Phi 1_{\bigcup|})^{-1/2}$.

3 Diagrammes chinois

3.1 Définition

Définition 3. *On appelle diagramme chinois un graphe comportant des sommets trivalents orientés, et des sommets monovalents libres. Le degré d'un tel diagramme est par définition la moitié du nombre total de sommets. On définit de même qu'à la section 1 l' espace de diagrammes* $\mathcal{B}$ *en quotientant par les relations (AS) et (IHX) puis en complétant par le degré.*

Cet espace est doublement gradué : par le degré défini ci-dessus et par le nombre de sommets monovalents libres.

3.2 Liens entre $\mathcal{B}$ et $\mathcal{A}(S^1)$

Définition 4. *On définit l'application* $\chi : \mathcal{B} \to \mathcal{A}(S^1)$ *de la manière suivante : soit* D *un diagramme de* $\mathcal{B}$ *ayant* n *sommets monovalents libres. On fixe* n *points sur le cercle* S^1*, et pour chaque bijection des sommets de* D *sur ces points on construit un diagramme sur* S^1 *en recollant les sommets sur le cercle comme sur la figure 9. On fait alors la moyenne sur toutes les bijections.*

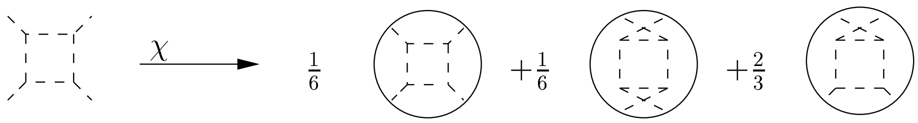


FIG. 9: Définition de χ

Théorème 1. *L'application* χ *ainsi définie passe au quotient, respecte le degré et définit un isomorphisme de* $\mathcal{B}$ *sur* $\mathcal{A}(S^1)$.

$\triangleleft$ Il est évident que χ respecte le degré, les relations (AS) et les relations (IHX) à l'interieur des diagrammes. Il faut alors construire un inverse $\sigma : \mathcal{A}(S^1) \to \mathcal{B}$, ce qu'on fait par récurrence sur le nombre de sommets s'appuyant sur S^1. On note $\mathcal{A}_k$ l'espace vectoriel engendré par les diagrammes ayant au plus k sommets sur S^1 et $\mathcal{I}$ le sous-espace engendré par les relations (AS) et (IHX) de $\mathcal{A}(S^1)$. On construit par reccurence une application $\sigma_k : \mathcal{A}_k \to \mathcal{B}$ compatible telle que

(i) $\sigma_k \circ \chi D = D$ si D a au plus k sommets libres.

(ii) $\sigma_k(AS) = 0$.

(iii) $\sigma_k(IHX) = 0$.

(iv) D'après (ii) et (iii), σ_k induit une application $\overline{\sigma_k} : \mathcal{A}_k/\mathcal{A}_k \cap \mathcal{I}$ telle que $\chi \circ \overline{\sigma_k} = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}_k/\mathcal{A}_k \cap \mathcal{I}}$.

Pour $k = 0$, on pose $\sigma_0(\bigcirc) = \emptyset$ et pour $k = 1$, on pose $\sigma_1(D) = D \setminus \bigcirc$ si D n'a qu'un seul sommet sur S^1. Les 4 propriétés ci-dessus sont trivialements vérifiées.

Fixons donc $k > 1$ et supposons que σ_{k-1} vérifiant (i)-(iv) est déjà construite : le groupe S_k agit sur $\mathcal{A}_k$ par permutation des sommets arrivant sur S^1. Comme $\mathcal{A}(S^1)$ et $\mathcal{A}([0,1])$ sont isomorphes, on choisit de travailler avec le deuxième espace. Les sommets d'un diagramme sont alors naturellement numérotés par l'ordre de $[0,1]$.

Lemme 2. *Soit $\pi \in S_k$, et D un diagramme s'appuyant sur $[0,1]$ avec k pattes. Soit U une présentation de π en produit de transpositions. Modulo $\mathcal{I} \cap \mathcal{A}_k$, $D - \pi D$ est égal à un élément de $\mathcal{A}_{k-1}$ que l'on note $\Gamma_D(U)$. De plus si U' est une autre présentation, $\sigma_{k-1} \circ \Gamma_D(U) = \sigma_{k-1} \circ \Gamma_D(U')$.*

◁ Soit $1 \leq i < k$ et U_i la transposition qui interchange i et $i+1$. On note S_i l'application $\mathcal{A}_k \to \mathcal{A}_{k-1}$ qui consiste à concaténer un graphe à k pattes avec le graphe de la figure 10.

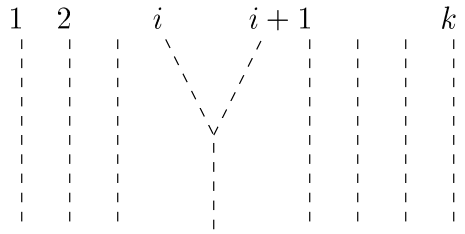


FIG. 10: Action de S_i

Soit U une présentation de π en produit de transpositions, c'est à dire $\pi = U_{i_1} \cdots U_{i_\mu}$. Posons $\Gamma_D(U) = \sum_{\nu=1}^{\mu} S_{i_\nu} U_{i_{\nu+1}} \cdots U_{i_\mu} D \in \mathcal{A}_{k-1}$

Utilisant la relation (STU), on obtient une série télescopique dont la somme est $D - \pi D$.

On veut voir que $\Lambda_D(U) = \sigma_{k-1} \circ \Gamma_D(U)$ ne dépend pas de U. Considérons le monoïde libre $\mathcal{M}$ engendré par les symboles $\{U_i\}_{1 \leq i < k}$. L'application Γ_D définit une application linéaire de $\mathbb{C}[\mathcal{M}] \to \mathcal{A}_{k-1}$. L'application naturelle de $\mathcal{M} \to S_k$ définit un morphisme d'algèbre $\mathbb{C}[\mathcal{M}] \to \mathbb{C}[S_k]$ dont le noyau est un idéal bilatère engendré par les éléments suivants :

- $U_i^2 = 1, 1 \leq i < k$
- $U_i U_j = U_j U_i, 1 \leq i < k, 1 \leq j < k, |i-j| > 1$
- $U_i U_{i+1} U_i = U_{i+1} U_i U_{i+1}, 1 \leq i < k-1$

On montre d'abord que Λ_D s'annule sur les générateurs :

$\Lambda_D(U_i^2 - 1) = \sigma_{k-1}(S_i U_i D + S_i D) = 0$ puisque σ_{k-1} s'annule sur les relations (AS) par hypothèse de récurrence.

$\Lambda_D(U_i U_j - U_j U_i) = \sigma_{k-1}(S_i U_j D + S_j D - S_j U_i D - S_i D) = 0$ par (STU).

$\Lambda_D(U_i U_{i+1} U_i - U_{i+1} U_i U_{i+1}) = \sigma_{k-1}(S_i U_{i+1} U_i D + S_{i+1} U_i D + S_i D - S_{i+1} U_i U_{i+1} D - S_i U_{i+1} D - S_{i+1} D) = 0$ par (STU) et (IHX).

Si V et W sont des éléments de $\mathcal{M}$, la formule qui définit Γ_D montre immédiatement que

$$\Gamma_D(VW) = \Gamma_{WD}(V) + \Gamma_W(D)$$

Comme tout générateur est de la forme $W_1 - W_2$, tout élément du noyau est combinaison linéaire d'éléments de la forme $X(W_1 - W_2)Z$.

On a alors $\Lambda_D(XW_1Z - XW_2Z) = \Lambda_{W_1ZD}(X) + \Lambda_{ZD}(W_1) + \Lambda_D(Z) - \Lambda_{W_2ZD}(X) - \Lambda_{ZD}(W_2) - \Lambda_D(Z)$. Les premiers termes s'annulent puisque $W_1 = W_2$ en tant que permutations, les deuxièmes par ce qui précède et les troisièmes trivialement. On en déduit que Λ_D s'annule identiquement sur l'idéal considéré. Cela signifie exactement que $\Lambda_D(U)$ ne dépend pas de U mais de la permutation π à laquelle U donne lieu.▹

Maintenant que le lemme est démontré, on pose pour un diagramme D ayant moins de k pattes $\sigma_k(D) = \sigma_{k-1}(D)$ et pour un diagramme D a k pattes,

$$\sigma_k(D) = D^- + \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_k} \Lambda_D(\pi)$$

où D^- désigne $D \setminus [0,1]$.

Soit C un diagramme chinois à k pattes externes. Il est de la forme D^- pour un certain $D \in \mathcal{A}_k$. Par définition, $\chi(C) = \frac{1}{k!} \sum_{\rho \in S_k} \rho D$.

Réappliquons σ_k, on obtient

$$\sigma_k \circ \chi(C) = \frac{1}{k!} \sum_{\rho \in S_k} (\rho D)^- + \frac{1}{(k!)^2} \sum_{\rho, \pi \in S_k} \Lambda_{\rho D}(\pi)$$

En appliquant une fois de plus la propriété $\Lambda_D(\rho\pi) = \Lambda_{\rho D}(\pi) + \Lambda_D(\rho)$, la deuxième somme s'annule. Comme tous les diagrammes $(\rho D)^-$ sont les mêmes, on obtient finalement que $\sigma_k \circ \chi(C) = C$, ce qui prouve (i).

Si des relations (AS) ou (IHX) apparaissent à l'intérieur de D, elles apparaîtront aussi dans D^- et $(\rho D)^-$ quelque soit ρ. Tout ce qu'il faut prouver pour (ii) et (iii), c'est que σ_k s'annule pour une relation du type (STU). C'est à dire que pour $1 \leq i < k$, il faut voir que $\sigma_k(D - U_i D) = \sigma_k(S_i D)$.

Mais

$$\sigma_k(D - U_i D) = D^- - (U_i D)^- + \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_k} (\Lambda_D(\pi) - \Lambda_{U_i D}(\pi))$$

La quantité que l'on somme est égale à $\Lambda_D(U_i)$ qui vaut par définition $\sigma_{k-1}(\Gamma_D(U_i)) = \sigma_{k-1}(S_i D) = \sigma_k(S_i D)$. Les diagrammes D^- et $(U_i D)^-$ s'annulent et le terme suivant est une moyenne de termes tous égaux à $\sigma_k(S_i D)$. Ceci conclut la démonstration de (iii).

Soit $D \in \mathcal{A}_k$ considéré modulo $\mathcal{I} \cap \mathcal{A}_k$. On veut montrer (iv), c'est à dire $\chi \circ \overline{\sigma_k}(D) = D$.

$$\chi \circ \overline{\sigma_k}(D) = \chi(D^-) + \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_k} \chi \circ \overline{\sigma_{k-1}} \Gamma_D(U_\pi)$$

Par hypothèse de récurrence, $\chi \circ \overline{\sigma_{k-1}} =$Id. Ainsi, comme $\chi(D^-) = \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_k} \pi D$, le terme à évaluer est $\frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_k} (\pi D + \Gamma_D(U_\pi))$. D'après le lemme 2, $\Gamma_D(U_\pi) = D - \pi D$ modulo $\mathcal{I} \cap \mathcal{A}_k$, ceci finit de prouver le théorème. ▹

On définit de manière naturelle un coproduit sur $\mathcal{B}$ de la manière suivante :

soit $D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ un diagramme chinois et sa décomposition en composantes connexes. La formule $\Delta D = \sum_{I \amalg J = \{1 \ldots n\}} \bigcup_{i \in I} D_i \otimes \bigcup_{j \in J} D_j$ définit un coproduit coassociatif et cocommutatif compatible avec la multiplication de $\mathcal{B}$.

Proposition 6. *Les applications σ et χ sont des isomorphismes de coalgèbre (mais pas des isomorphismes d'algèbre).*

3.3 Extension des définitions et isomorphismes

Soit Γ une variété de dimension 1 et X un ensemble fini. On appelle (Γ, X)-diagramme un graphe comportant des sommets trivalents orientés, des sommets monovalents s'appuyant sur Γ munis d'une orientation, et des sommets monovalents libres indicés par des éléments de X (plusieurs sommets peuvent avoir le même indice).

On dispose de la notion de degré global, puis partiel par rapport à chaque élément de X, on a toujours les relations (AS) et (IHX). On appelle $\mathcal{A}(\Gamma, X)$ l'espace vectoriel gradué engendré par les (Γ, X)-diagrammes quotientés par les relations (AS) et (IHX) puis complétés par rapport au degré.

Cette notion généralise les deux autres notions de diagrammes : $\mathcal{A}(\Gamma, \emptyset) = \mathcal{A}(\Gamma)$ et $\mathcal{A}(\emptyset, *) = \mathcal{B}$.

Le théorème 1 montre que $\mathcal{A}(*) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{A}(S^1)$. On veut voir dans quelle mesure ce résultat s'étend si on rajoute une variété et des points. On peut définir une application du type de χ :

$$\chi_x : \mathcal{A}(\Gamma, X \cup *^x) \to \mathcal{A}(\Gamma \cup [0,1]^x, X)$$

La démonstration s'effectue de la même façon car on a pris soin de remplacer S^1 par $[0,1]$ où l'ordre sur les pattes d'un diagramme est bien défini. On remarque que grâce à cette application, on peut "simuler" la présence d'un intervalle $[0,1]$ à l'aide de diagrammes chinois. Qu'en est-il si on veut "simuler" un cercle ?

Composons l'application ci-dessus avec l'inclusion de $[0,1]^*$ dans $\bigcirc^x$. On appelle encore cette application

$$\chi_x : \mathcal{A}(\Gamma, X \cup *^x) \to \mathcal{A}(\Gamma \cup \bigcirc^x, X)$$

Ce n'est pas un isomorphisme (sauf si X et Γ sont vides) mais c'est un morphisme surjectif dont on peut préciser le noyau.

Proposition 7. *Le noyau de χ_x est engendré par les relations de la figure 11.*

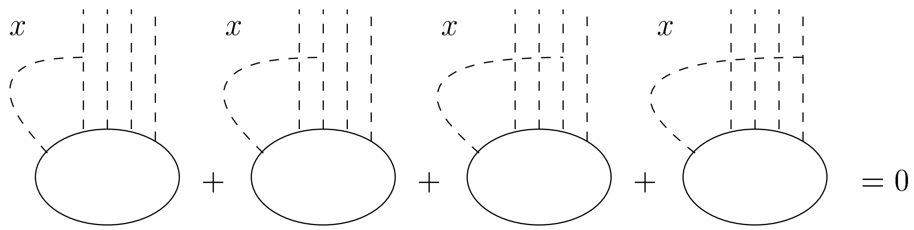


FIG. 11: Relations de fermeture

On définit alors $\mathcal{A}(\Gamma, X \cup \circledast^x)$ le quotient de $\mathcal{A}(\Gamma, X \cup *^x)$ par les relations de fermeture, de telle sorte que $\chi_x : \mathcal{A}(\Gamma, X \cup \circledast^x) \to \mathcal{A}(\Gamma \cup \bigcirc^x, X)$ devienne un isomorphisme.

4 Isomorphisme de Duflo

4.1 Produits et différentielles

Définition 5. *On définit une forme bilinéaire $\langle , \rangle : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to \mathcal{A}(\emptyset)$ de la manière suivante : Soit C et D deux diagrammes chinois dont l'un au moins ne contient pas d'arête isolée. Si C et D n'ont pas le même nombre de pattes libres, on pose $\langle C, D\rangle = 0$, sinon on définit $\langle C, D\rangle$ comme étant la somme de tous les diagrammes obtenus en recollant les pattes de C sur les pattes de D (si ces diagrammes ont k pattes, cela fait une somme de $k!$ diagrammes).*

Ce produit respecte le degré et les relations (AS) et (IHX). Il fournit donc une application bilinéaire de $\mathcal{B} \times \mathcal{B} \to \mathcal{A}(\emptyset)$. Si z est un élément de $\mathcal{B}$ combinaison de diagrammes sans arêtes isolées, il définit une forme linéaire i_z par la formule $i_z(D) = \langle z, D\rangle$.

Définition 6. *Soit D un diagramme chinois sans arête isolée. On définit une application $\partial_D : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ de la façon suivante : soit C un diagramme chinois, s'il a moins de pattes libres que D, on pose $\partial_D(C) = 0$. Sinon, on définit $\partial_D(C)$ comme étant la somme de tous les diagrammes obtenus en recollant D sur une partie de C. On prolonge cette définition par linéarité.*

Si π est la projection de $\mathcal{B}$ sur sa partie de degré nul, pour tous éléments $z, w \in \mathcal{B}$,

$$\langle z, w\rangle = \pi(\partial_z(w)) = \pi(\partial_w(z)).$$

De même, $i_w(z) = \pi(\partial_w(z))$.

De plus ∂ est dual de la multiplication au sens où $\langle zw, t\rangle = \langle w, \partial_z t\rangle$.

4.2 L'entrelacs de Hopf

Soit $H = Z(\text{ф}) \in \mathcal{A}(|\bigcirc)$. L'entrelacs de Hopf est ici supposé sans twist, de telle sorte que H ne contient aucun diagramme avec une arête isolée sur le cercle.

Utilisant l'isomorphisme χ, on obtient un élément H' dans $\mathcal{A}(|\circledast)$

Théorème 2. *L'application $\Upsilon = i_{H'} : \mathcal{B} \to \mathcal{A}(|)$ est un isomorphisme d'algèbre.*

$\triangleleft$ Il faut tout d'abord montrer qu'elle est bien définie puisqu'a priori, l'application $i_{H'}$ est définie sur $\mathcal{A}(|*)$ et non $\mathcal{A}(|\circledast)$. Pour cela, il suffit de vérifier qu'elle s'annule sur les relations de fermeture.

On le vérifie pour un facteur h de H' et un élément D de $\mathcal{B}$ qui ont le même nombre de pattes et un choix de recollement entre ces pattes.

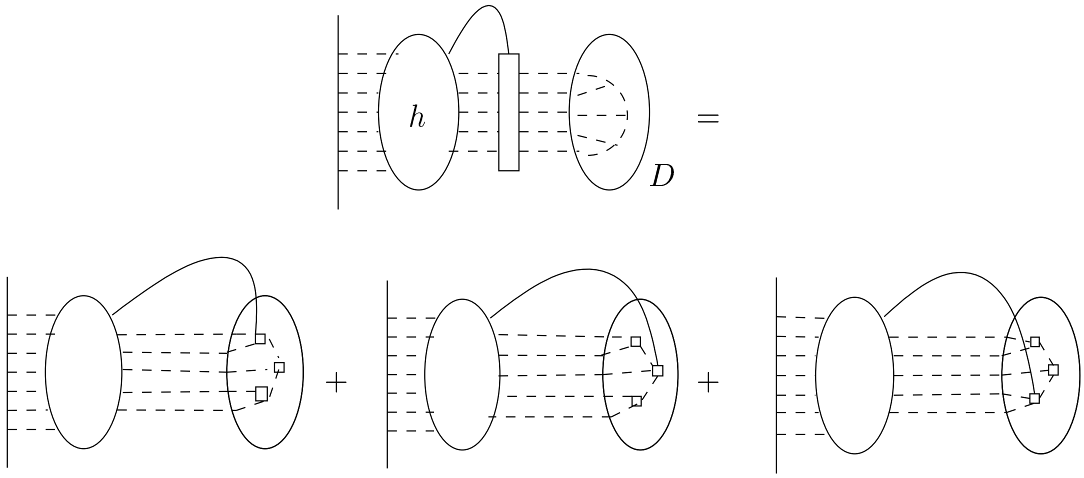


FIG. 12: Comportement des relations de fermeture

Dans cette figure, on représente par un rectangle une somme sur toutes les façons d'attacher la branche qui s'appuie sur le carré à celles qui sont à l'interieur. Le dessin du haut représente donc la relation de fermeture. Si on relie la branche considérer à tous les nœuds du diagramme D, on obtient 0 par appliation de la relation (IHX). Mais en regroupant chaque terme par arêtes, on se rend compte que tout s'annule sauf les diagrammes correspondant à la relation de fermeture. Cela démontre ce qu'on cherchait.

Prenons D_1 et D_2 deux diagrammes de $\mathcal{B}$. On veut évaluer

$$\Upsilon(D_1 D_2) = i_{H'}(D_1 D_2) = \langle H', D_1 D_2\rangle).$$

L'opération $|\bigcirc\bigcirc \to |\bigcirc$ qui envoie les deux cercles sur un seul induit par image réciproque une application $\delta^x_{x_1,x_2} : \mathcal{A}(|\bigcirc) \to \mathcal{A}(|\bigcirc\bigcirc)$. Cette opération correspond au niveau des enchevêtrements à doubler la composante fermée. Par image réciproque avec χ_{x_1,x_2}, on obtient une transformation de $\mathcal{A}(|\circledast^x) \to \mathcal{A}(|\circledast^{x_1}\circledast^{x_2})$.

Notons $\delta'^x_{x_1,x_2}$ la transformation suivante, opèrant sur un diagramme D de $\mathcal{A}(|*^x)$. Pour chaque patte de D indicée $*^x$, on fait un choix entre $*^{x_1}$ et $*^{x_2}$. Ceci nous donne un diagramme dans $\mathcal{A}(|*^{x_1}*^{x_2})$. On fait la somme sur tous les choix possibles, et on obtient $\delta^x_{x_1,x_2}(D)$.

Proposition 8. *L'application $\delta'^x_{x_1,x_2}$ passe au quotient et fait commuter le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(|*^x) \arrow[r] \arrow[d, "\delta'^x_{x_1,x_2}"] & \mathcal{A}(|\circledast^x) \arrow[r, "\chi_x"] \arrow[d] & \mathcal{A}(|\bigcirc^x) \arrow[d, "\delta^x_{x_1,x_2}"] \\
\mathcal{A}(|*^{x_1}*^{x_2}) \arrow[r] & \mathcal{A}(|\circledast^{x_1}\circledast^{x_2}) \arrow[r, "\chi_{x_1,x_2}"] & \mathcal{A}(|\bigcirc^{x_1}\bigcirc^{x_2})
\end{tikzcd}$$

Ceci étant acquis, revenons à l'évaluation de $\Upsilon(D_1D_2)$.

On remarque que recoller les pattes de H' sur D_1D_2 revient à choisir quelles pattes de H' iront sur D_1 et les quelles iront sur D_2. C'est donc la même chose que recoller $\delta'^x_{x_1,x_2}(H')$ avec le diagramme D_1D_2 vu comme élément de $\mathcal{A}(|*^{x_1}*^{x_2})$.

Maintenant on reconnaît $\delta'^x_{x_1,x_2}(H') = \chi^{-1}(\delta^x_{x_1,x_2}(H))$. Mais ce diagramme n'est autre que l'invariant de Kontsevich de l'entrelacs de Hopf dont on a doublé la composante circulaire. Il est évident que cet entrelacs est le même que le produit connexe de deux entrelacs de Hopf. On en déduit que $\delta^x_{x_1,x_2}(H) = H\sharp H$ où $\#$ désigne le produit connexe $\mathcal{A}(|\bigcirc^{x_1}) \times \mathcal{A}(|\bigcirc^{x_2}) \to \mathcal{A}(|\bigcirc^{x_1}\bigcirc^{x_2})$ induit par la concaténation des deux composantes verticales. Cette opération commute avec χ de telle sorte que $\chi^{-1}_{x_1,x_2}(H\sharp H) = H'\sharp H'$.

Donc, $\Upsilon(D_1D_2) = \langle H'\sharp H', D_1D_2\rangle_{x_1,x_2} = \langle H', D_1\rangle_{x_1}\sharp\langle H', D_2\rangle_{x_2} = \Upsilon(D_1)\sharp\Upsilon(D_2)$.

4.3 Précision sur la forme de Υ

L'opération Υ ne respecte pas le degré : si $h \in \mathcal{A}(|\circledast)$ est un diagramme tel qu'il en apparaît dans H', l'opération $i_{H'}$ augmente le degré d'un diagramme D de $n-k$ où n est le degré de h et k le nombre de pattes de h : appelons indice cet entier relatif.

On remarque de plus que dans un diagramme du type de h, on a nécessairement $n \geq k$. En effet, toute patte est reliée soit à la composante verticale, soit à un sommet trivalent interieur (il n'y a pas d'arêtes isolées dans H'). De plus, si deux pattes sont reliées à un même sommet intérieur, le diagramme s'annule, grâce à la relation (AS). Notons H'' la partie de H' formée des diagrammes d'indice nul. L'application $\Upsilon_0 = i_{H'}$ respecte le degré et pour cette raison, est aussi multiplicative.

Une propriété fondamentale de l'intégrale de Kontsevich est d'être à valeur dans les éléments de type groupe. Ceci signifie que $\Delta H = H \otimes H$ où Δ désigne la comultiplication usuelle de $\mathcal{A}(|\bigcirc)$. Comme χ est un isomorphisme de coalgèbre, on en déduit que $\Delta H' = H' \otimes H'$, et puis comme Δ respecte tous les degrés, que $\Delta H'' = H''$.

De cette équation et des conditions de degrés, on déduit une certaine forme que doit avoir le diagramme H'' :

Proposition 9. $H'' = \exp_\sharp(\vdash)\Omega$ *où Ω est une combinaison des diagrammes ω_{2n}.*

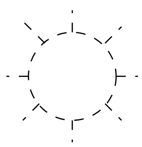


FIG. 13: Éléments ω_{2n} (ici, $n=4$).

A priori, H'' est constitué de diagrammes d'indice nul. Il est facile de voir que ce sont des diagrammes constitués d'un certain nombre de roues de tailles quelconques avec quelques arêtes qui s'appuient sur la composante verticale.

On regroupe ces diagrammes suivant le nombre d'arêtes qui s'appuient sur la composante verticale, ce qui permet d'écrire

$$H'' = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} (\vdash)^{\sharp k} \Omega_k.$$

avec $\Omega_k \in \mathcal{B}$ sont des combinaisons linéaires de produits de roues. Si on calcule le coproduit de H'' sous cette forme, on obtient

$$\Delta H'' = \sum_{k \geq 0} \sum_{k_1 + k_2 = k} \frac{1}{k_1 ! k_2 !} (\vdash)^{\sharp k_1} \otimes (\vdash)^{\sharp k_2} \cdot \Delta \Omega_k.$$

On en déduit que $\Delta \Omega_{k_1 + k_2} = \Omega_{k_1} \otimes \Omega_{k_2}$ quels que soient k_1 et k_2. Ceci implique que tous les Ω_k sont proportionnels, puis en fait égaux à un même élément Ω qui satisfait $\Delta \Omega = \Omega \otimes \Omega$ et $\varepsilon(\Omega) = 1$. Comme Ω est de type groupe dans l'algèbre de Hopf $\mathcal{B}$, c'est l'exponentielle d'un élément primitif $\omega = \sum_{n > 0} a_n \omega_{2n}$ (les ω_{2n+1} sont nuls par antisymétrie).

Avec cette forme, on peut facilement décrire l'application Υ_0 :

$$\Upsilon_0(D) = i_{H''}(D) = \langle H'', D \rangle = \langle \exp_\sharp(\vdash)\Omega, D \rangle = \langle \exp_\sharp(\vdash), \partial_\Omega D \rangle = \chi(\partial_\Omega D)$$

On peut ici reconnaître un analogue de l'isomorphisme de Duflo, où le rôle de l'isomorphisme de Poincaré-Birkhoff-Witt est joué par χ et Ω joue le rôle de $j^{\frac{1}{2}}$. On montre en fait que ce sont les mêmes coefficients qui interviennent dans les deux expressions.

On veut montrer maintenant que $H' = H''$ et en déduire une formule pour l'invariant du nœud trivial.

4.4 Enroulement du nœud trivial et calcul de $\nu^2 = Z(\bigcirc)$

Considérons l'application $\psi_n : \bigcirc \to \bigcirc$ donnée dans le plan complexe par $z \mapsto z^n$.

Lemme 3. *$\chi^{-1} \circ \psi_n^* \circ \chi : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ revient à multiplier un diagramme à k pattes par n^k.*

Considérons l'intégrale de Kontesvich du nœud en bande T_n de la figure 14.

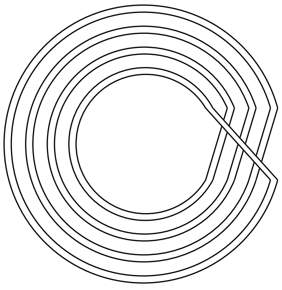


FIG. 14: Nœud trivial enroulé n fois (ici n=4)

L'intégrale de Kontsevich d'un tel nœud est donnée par la formule

$$Z(T_n) = \psi_n^* \left(Z(\bigcirc) \sharp \exp_\sharp(-\frac{1}{2n} \frown) \right) \sharp \exp_\sharp(\frac{1}{2} \frown).$$

Mais on reconnaît dans ce nœud un nœud trivial d'autoenlacement $1 - n$. Par invariance, $Z(T_n) = \exp_\sharp(\frac{1-n}{2} \frown) \sharp Z(\bigcirc)$. On obtient donc l'équation

$$\psi_n^* \left(Z(\bigcirc) \sharp \exp_\sharp(-\frac{1}{2n} \frown) \right) = \exp_\sharp(-\frac{n}{2} \frown) Z(\bigcirc)$$

pour tout $n > 0$. On a à gauche une série infinie en n et à droite une série formelle. Ceci implique que les facteurs en $n > 0$ sont nuls sur le membre de gauche.

Si on projette ces séries sur le terme $n = 0$, on obtient à droite $Z(\bigcirc)$ qui est la quantité recherchée.

On utilise le lemme suivant :

Lemme 4. *Si $x_1, \ldots, x_k \in \mathcal{A}(|)$ on tous au moins une patte sur le cercle ($\varepsilon(x_i) = 0$), alors $\chi^{-1}(x_1\sharp\cdots\sharp x_k)$ est une combinaison de diagrammes ayant tous au moins k pattes.*

Regardons maintenant le terme de gauche après application de χ^{-1}. Notons φ_n^* l'opération ψ_n^* conjuguée par χ comme elle est explicitée dans le lemme 3.

Sous le χ^{-1} apparaît un produit connexe de termes. Celui qui est facteur de n^{-k} est d'après le lemme 4 une combinaison linéaire de diagrammes ayant au moins k pattes avec $k+1$ pattes dès que la contribution de $Z(\bigcirc)$ est non triviale. Comme φ_n^* agit sur les diagrammes à k pattes par multiplication par n^k, tout terme dans lequel $Z(\bigcirc)$ contribue sera multiplié par une puissance de n. On doit donc chercher le terme constant de $\varphi_n^*\chi^{-1}\exp_\sharp(-\frac{1}{2n}\frown)$.

Le terme en facteur de n^{-k} est proportionnel à $\chi^{-1}(\frown^{\sharp k})$ (donc de degré k), dont il ne faut garder que les diagrammes ayant k pattes extérieures. Cela signifie que dans l'expression de $\chi^{-1}Z(\bigcirc)$ n'apparaissent que des diagrammes d'indice nul.

Démonstration du lemme :

◃ Soit ρ l'application qui envoie tout diagramme non relié à la composante verticale sur 0. Comme ces diagrammes sont inchangés par somme connexe et par χ, on peut supposer que les x_i n'en contiennent pas et appliquer ρ par défaut à chaque étape.

On utilise l'isomorphisme $\Upsilon_0 = \chi \circ \partial_\Omega$.

$$\chi^{-1}(x_1\sharp\cdots\sharp x_k) = \partial_\Omega\left(\partial_\Omega^{-1}\chi^{-1}x_1\sharp\cdots\sharp\partial_\Omega^{-1}\chi^{-1}x_k\right) = \partial_\Omega(y_1\cdots y_k)$$

où on a posé $y_i = \rho\Upsilon_0^{-1}x_i = \rho\partial_\Omega^{-1}\chi^{-1}x_i$. On a $\varepsilon(y_i) = 0$ car $\varepsilon(\chi^{-1}x_i) = 0$ (χ est un isomorphisme de coalgèbre), et ∂_Ω^{-1} ne peut pas créer de diagramme vide.

Comme on l'a déjà remarqué, dériver un diagramme D par rapport à Ω est la même chose que doubler ses pattes et recoller Ω sur la moitié de celles-ci. Cela se traduit par le fait que $\partial_\Omega(y_1\cdots y_k)_a = \langle\Omega_b, \delta_{a,b}(y_1\cdots y_k)\rangle_b$

On applique $\delta_{a,b}$ à ce produit :

$\delta_{a,b}y_i = y_{ia} + z_i$ où y_i ne contient que des pattes marquées a et z_i contient nécessairement une patte marquée b.

$$\rho\partial_\Omega(y_1\cdots y_k) = \rho\langle\Omega_a, y_{1a}\delta_{ab}(y_2\cdots y_k)\rangle_a + \rho\langle\Omega_a, z_1\delta_{ab}(y_2\cdots y_k)\rangle_a$$

Il se trouve que $\rho\langle\Omega_a, y_{1a}\delta_{ab}(y_2\cdots y_k)\rangle_a = \rho\langle\partial_{y_{1a}}\Omega_a, \delta_{ab}(y_2\cdots y_k)\rangle_a$. Mais comme y_{1a} n'a pas de composante constante, $\rho\partial_{y_{1a}}\Omega = \langle y_{1a}, \delta_{xy}\Omega\rangle_y = \rho\langle y_{1a}, \Omega_x\Omega_y\rangle_y = \rho\langle y_{1a}, \Omega_y\rangle_y\Omega = 0$.

Cette propriété vient du fait que le double d'un nœud trivial est trivial.

Ainsi, $\rho\partial_\Omega(y_1\cdots y_k) = \rho\langle\Omega_a, z_1\delta_{ab}(y_2\cdots y_k)\rangle_a$. Comme z_1 a nécessairement une patte marquée b, le résultat aussi. Si on continue ainsi pour tous les y_i, on obtient $\rho\langle\Omega_a, z_1\cdots z_k\rangle_a$ qui a au moins k pattes marquées b. ▹