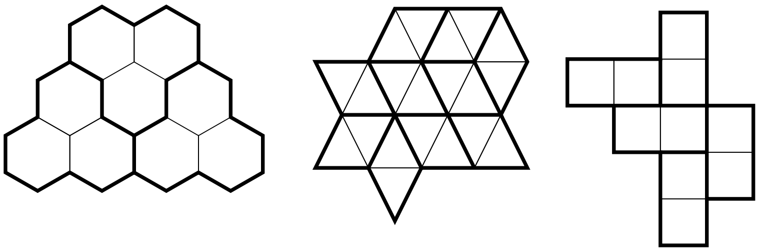
Pavages, surfaces dans un graphe de Cayley et Coloriages

Gilles Radenne

16 mai 2001

Présentation des problèmes de pavages

Dans cet exposé, on va considérer une catégorie de problèmes de pavage, les pavages polyominos. On se place dans un réseau polygonal triangulaire, carré ou hexagonal. Les polygones élémentaires du réseau seront appelé des cases. (On rencontre parfois l'appelation cellule, en particulier en anglais). Un pavage polyomino est un pavage d'une région finie connexe $\mathcal{D}$ inscrite dans ce réseau à l'aide d'un ensemble de tuiles Σ, toutes les tuiles étant connexes et simplement connexes. (Chaque tuile de Σ peut être utilisée autant de fois que l'on veut) On ne considerera que des régions simplement connexes, et donc toute région ou tuile pourra être caractérisée par son contour.



Exemples de pavages

Le problème qui va être abordé est le suivant : Étant donné un ensemble Σ de tuiles donné, peut-on trouver des critères pour déterminer si une fégion quelconque $\mathcal{D}$ admet un pavage à l'aide de Σ. En général on obtient facilement des conditions nécessaires, et on va étudier plus en détail un cas dans lequel on obtient une caractérisation complète, qui fournit en plus un pavage quand il en existe un.

1 Groupes de pavages et Graphes de Cayley

1.1 Définition des groupes de pavages

Étant donné qu'on s'est placé sur un réseau polygonal régulier et qu'on s'interesse à des bords de régions, qui sont des chemins fermés, on va considérer l'ensemble F des chemins sans rebroussement sur le maillage utilisé. En considérant qu'un rebroussement (une arête parcourue deux fois de suites dans les deux sens) se ramène à un chemin vide, cest ensemble est muni par la concaténation d'une structure de groupe.

Dans le cas d'un maillage carré, ce groupe est $\langle a, b \rangle$, le groupe libre à deux générateurs, a correspondant à un pas vers la droite et b à un pas vers le haut. Pour un maillage triangulaire, c'est $\langle a, b, c \rangle$, a, b et c correspondant respectivement à des pas faisant un angle de 0, $2\pi/3$ et $4\pi/3$ avec l'horizontale. Pour un maillage hexagonal, c'est le quotient $\langle a, b, c \rangle / a^2, b^2, c^2$, où a, b et c ont la même signification, mais cette fois indépendamment du sens avec lequel on parcourt une arête.

On a donc une correspondance entre les chemins sur le maillage et les mots de F. Étant donné une courbe fermée, les mots correspondants aux parcours sont conjugués entre eux dans F. (Sauf exception, les circuits fermés sans croisement seront toujours parcourus dans le sens trigonométrique). En fait, pour les chemins fermés, une conjugaison dans F correspond à un déplacement de la région délimitée dans le plan, aussi il sera naturel de ne considérer que des groupes distingués dans F. On pose $T(\Sigma)$ le sous-groupe distingué de F engendré par les mots des contours des tuiles de Σ. C'est ce groupe qu'on appelle le groupe de pavage associé à Σ. Cette notion a été introduite par John Conway dans. Un résultat immédiat est que si $\mathcal{D}$ est pavable à l'aide de Σ, alors les mots correspondant à $\partial\mathcal{D}$ sont dans $T(\Sigma)$. En fait, Conway a montré que cette appartenance est équivalente à l'existence d'un pavage signé de $\mathcal{D}$ par Σ. (On appelle pavage signé un pavage dans lequel il peut yavoir recouvremment des tuiles, qui peuvent être comptées positivement ou négativement).

1.2 Graphe de Cayley associé à un groupe de pavage

On va maintenant définir le graphe de Cayley associé à un groupe :

Soit G un groupe de type fini. Il peut être défini par un ensemble de générateurs $a_1, \ldots, a_n$ et un ensemble de relations $r_1, \ldots, r_p$. (Les relations seront écrites sous la forme d'éléments de $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ qui s'annulent dans G) On aura alors $G = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle / r_1, \ldots, r_p$.

Le graphe de Cayley associé à G sera un graphe orienté dont les sommets sont les éléments de G, et on aura une arête de x vers y ssi il existe i tel que $y = xa_i$. L'arête en question sera alors étiquetée a_i. Les cycles dans ce graphe correspondront donc aux produits quelconques de r_i.

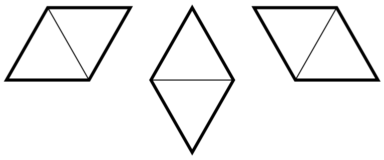
Le graphe de Cayley associé à $T(\Sigma)$ sera en fait le graphe de Cayley de $F/T(\Sigma)$, qu'on notera $\Gamma(\Sigma)$. les cycles de $\Gamma(\Sigma)$ correspondront donc aux éléments de $T(\Sigma)$, et donc une région $\mathcal{D}$ admettra un pavage signé par Σ si et seulement si un mot correspondant à $\partial\mathcal{D}$ donne un cycle dans $\Gamma(\Sigma)$.

2 Pavages par des dominos ou des losanges et relèvements dans le graphe de Cayley associé

2.1 Projection du graphe de Cayley

On va maintenant étudier un cas précis, celui des pavages par des losanges dans un maillage triangulaire.

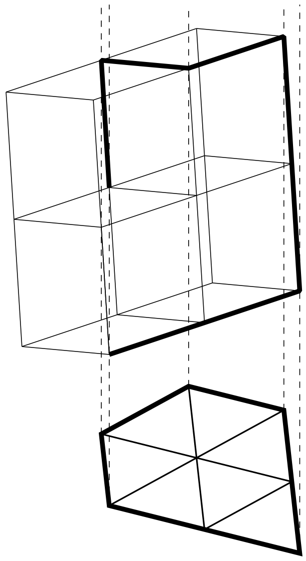
On a donc un ensemble Σ constitué des trois tuiles suivantes :



Des mots correspondant à leur contours sont $ac^{-1}a^{-1}c$, $b^{-1}c^{-1}bc$ et $aba^{-1}b^{-1}$. $T(\Sigma)$ est donc le groupe dérivé de F, et $F/T(\Sigma) = \mathbb{Z}^3$, et donc $\Gamma(\Sigma)$ peut être représenté dans l'espace par un réseau cubique, les arêtes a, b et c correspondant aux trois directions su reseau.

Plaçons maintenant un plan $\mathcal{P}$ dans l'espace, et $\Gamma(\Sigma)$ comme un réseau cubique donc une des diagonales est normale au plan. La projection orthogonale p de $\Gamma(\Sigma)$ sur $\mathcal{P}$ est alors un réseau triangulaire régulier dans le plan, on donc pouvoir placer les régions à paver sur ce réseau. Les trois directions du réseau cubique donnent par projection les trois directions du réseau triangulaire, on peut donc choisir une direction a sur le plan, et placer les directions dans $\Gamma(\Sigma)$ de telle façon qu'un arête de $\Gamma(\Sigma)$ se projete dans le plan sur une arête de même type et parcourue dans le même sens. On dira alors qu'une arête (de $\Gamma(\Sigma)$ ou de $p(\Gamma(\Sigma))$) sera parcourue en sens direct quand elle sera parcourue dans le sens a, b ou c, et dans le sens indirect quand elle sera parcourue dans le sens a^{-1}, b^{-1} ou c^{-1}. Une orientation «haut» étant choisie sur la normale à $\mathcal{P}$, on peut de plus (Quitte à faire une réflexion par rapport à $\mathcal{P}$) placer $\Gamma(\Sigma)$ de telle sorte qu'une arête parcourue dans le sens direct fasse augmenter la hauteur. Enfin on étirera $\Gamma(\Sigma)$ verticalement, de manière à ce que la hauteur de la diagonale verticale d'un cube vale 3. Chaque arête parcourue dans le sens direct incrémentera alors la hauteur de 1, et la décrémentera de 1 si elle est parcourue dans le sens indirect.

Le placement et l'orientation ayant été convenablement choisis, considérons maintenant un chemin P dans le plan, allant d'un point x à un point y. Si on chosit un point x' dans $p^{-1}(x) \in \Gamma(\Sigma)$, P se relève en un unique chemin P' dans $\Gamma(\Sigma)$ par p. Si P' va de x' à y', on a bien évidemment $p(y') = y$, et un autre choix de x' résulte en une translation verticale de P'. On peut donc définir la variation de hauteur le long de P, $\Delta h(P) = h(y') - h(x')$ ou $h(y')$ et $h(x')$ correspondent aux hauteurs de x' et y' pour un relhvement donné de P. Il est immédiat de voir que Δh est un morphisme de F vers $\mathbb{Z}$, et $\Delta h(a) = \Delta h(b) = \Delta h(c) = 1$, Δh est donc très simple à calculer pour un chemin quelconque.



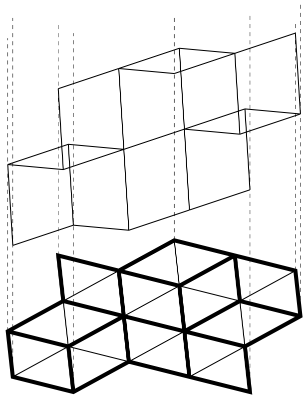
Maintenant soit P un chemin fermé de F. Si on considère un point quelconque x de P, $x' \in p^{-1}(x)$ et y' l'extremité du relèvement P' de P partant de x, on a $\Delta h(P') = h(y') - h(x')$ qui ne dépend pas du choix de x. D'autre part, $p(y') = x$, et donc $y' = x' \iff h(y') = h(x')$. En d'autres termes, $P \in T(\Sigma) \iff \Delta h(P) = 0$, ou encore $T(\Sigma) = ker \Delta h$. On a donc déja un critère simple pour l'existence d'un pavage signé.

On va en profiter pour définir une fonction de hauteur h sur $\partial\mathcal{D}$ quand $\partial\mathcal{D} \in T(\Sigma)$: On choisit un point $x \in \partial\mathcal{D}$, on pose $h(x) = 0$, et pour $y \in \partial\mathcal{D}$, $h(y) = \Delta h(P)$ ou P est un chemin de x vers y sur $\partial\mathcal{D}$.

2.2 Revêtement par le graphe de Cayley

On va maintenant définir à l'aide de $\Gamma(\Sigma)$ le 2-simplexe $\Gamma^2(\Sigma)$. C'est tout simplement le 2-simplexe dont les faces (ou celluleß) sont les faces des cubes du réseau. Chaque face de $\Gamma(\Sigma)$ se projette alors en deux triangles accolés, c'est à dire un une tuile de Σ. La projection p est alors un revêtement de $\mathcal{P}$ par $\Gamma^2(\Sigma)$.

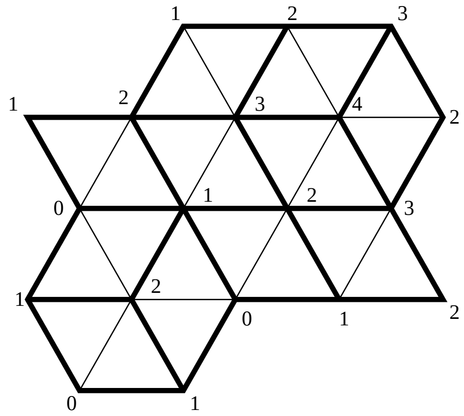
Soit $\mathcal{D}$ une région dans $\mathcal{P}$. Considérons une surface dans $\Gamma^2(\Sigma)$ s'appuyant sur un relèvement P' de $\partial\mathcal{D}$. Sa projection sur $\mathcal{P}$ donne alors un pavage signé de $\mathcal{D}$. Inversement, tout pavage signé de $\mathcal{D}$ se relève de manière unique en une surface de $\Gamma^2(\sigma)$ s'appuyant sur P'. Quand $\mathcal{D}$ est pavable, les pavages sont donc en correspondance avec les surfaces minimales basées sur P'. Cela donne donc une caractérisation des pavages, et va nous donner des critères supplémentaires :



La surface de $\Gamma^2(\Sigma)$ associée à un pavage de $\mathcal{D}$ correspond à une fonction de hauteur définie sur $\mathcal{D}$, et sur les arêtes des tuiles du pavage, cette fonction de hauteur varie de la manière habituelle (elle augmente de 1 sur une arête directe, et baisse de 1 sinon). Pour un triangle $xyz \in \mathcal{D}$, (Avec $xyzx$ un chemin direct) deux arêtes sont des bords de la tuile qui contient ce triangle, xy et yz par exemple. La fonction de hauteur varie de 1 sur xy et de 1 sur yz, donc de -2 sur zx : Sur une arête directe la hauteur varie de 1 si elle est sur le bord d'une tuile, de -2 sinon. Sur un chemin direct, la variation de hauteur ne peut donc pas être plus grande que la longueur du chemin. Par conséquence, si on a un chemin direct $P \subset \mathcal{D}$ allant de $x \in \partial\mathcal{D}$ vers $y \in \partial\mathcal{D}$, alors $h(y) - h(x) \leqslant l(P)$. (La fonction de hauteur définie par le pavage coïncide évidemment avec h sur $\partial\mathcal{D}$).

On va reformuler ce critère de la manière suivante : On définit $\widetilde{h}$ sur $\mathcal{D}$ par $\widetilde{h}(y) = min(h(x)+d(x,y))$ ou x parcourt $\partial\mathcal{D}$ et $d(x,y)$ est la longueur d'un chemin direct minimal allant de x à y. Sur $\partial\mathcal{D}$, on a $\widetilde{h} \leqslant h$. On a alors comme condition nécessaire de pavabilité $\widetilde{h}/\partial\mathcal{D} = h/\partial\mathcal{D}$. Quand on a un chemin direct P de x vers y tel que $h(x) + \Delta h(P) < h(y)$, on dit qu'il y a obstruction au pavage, et ce chemin est appelé une ligne d'obstruction.

En fait, et c'est là tout l'interêt de cette approche, cette condition est suffisante : Si $\widetilde{h}$ et h coïncident sur $\partial\mathcal{D}$, alors $\widetilde{h}$ définit dans $\Gamma^2(\Sigma)$ une surface dont la projection donne un pavage de $\mathcal{D}$. Sur $\mathcal{D}$, le pavage s'obtient en prenant tous les arêtes le long desquelles $\widetilde{h}$ varie de 1. Tout triangle est bordé par exactement deux de ces arêtes, cela divise donc bien $\mathcal{D}$ en losanges.



Notons enfin que le calcul de $\widetilde{h}$ peut se ramener au calcul des distances de tous les sommets d'un graphe orienté par rapport à un sommet fixé, calcul qui algorithmiquement s'implémente en complexité linéaire, on a donc un algorithme linéaire pour tester l'existence d'un pavage, et en fournir un le cas échéant.

2.3 Lignes de fracture

Soit $\mathcal{D}$ une figure pavable, considérons maintenant ce qui se passe si on a deux points x et y de $\partial\mathcal{D}$ tels que $h(y) = h(x) + d(x, y)$. On a donc un chemin direct P de x vers y tel que $h(y) - h(x) = \Delta h(P) = l(P)$. Sur un pavage de $\mathcal{D}$, toute arête de P sera alors forcément sur le bord d'une tuile, sinon, en appelant h' la fonction de hauteur associée au pavage, on aurait $h'(y) - h'(x) < l(P) = h(y) - h(x)$, et donc h' et h ne serait pas égales sur $\partial\mathcal{D}$. En d'autre terme, aucune tuile du pavage ne peut être à cheval sur P, et P divise donc $\mathcal{D}$ en deux sous-figures pavables, $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ telles que tout pavage de $\mathcal{D}$ se compose d'un pavage de $\mathcal{D}_1$ et d'un pavage de $\mathcal{D}_2$. On appelle un tel chemin une ligne de fracture. De plus, pour toute paire de triangles qu'aucune ligne de fracture ne sépare, il existe un pavage dont une des tuiles est formée de cette paire de triangles.

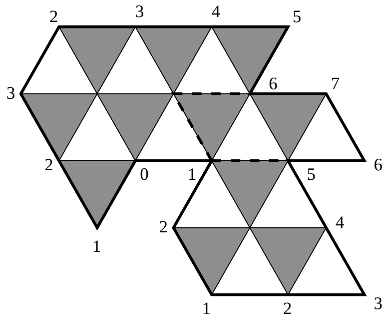
3 Interprétation en termes de coloriage, et extension

3.1 Coloriage

Colorions maintenant en noir tous les triangles pointant vers le bas, et en blanc tout les triangles pointant vers le haut. Un arête est alors parcourue dans le sens direct si elle est bordée à gauche par un triangle blanc. On montre alors récursivement que pour une figure $\mathcal{D}$ quelconque, $\Delta h(\partial\mathcal{D}) = 3(N_B - N_N)$, ou N_B et N_N représentent le nombre de triangles blancs et noirs composant $\mathcal{D}$.

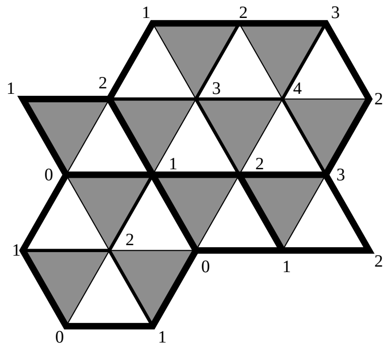
On a alors que $\mathcal{D}$ admet un pavage signé si et seulement si elle est équilibrée¸ c'est à dire si elle comporte autant de triangles blancs que de triangles noirs. (Un résultat plus général dit que pour tout ensemble de tuiles, il existe un argument de coloriage équivalent à l'existence d'un pavage signé).

Que représente alors une ligne d'obstruction P en terme de coloriage ? C'est tout d'abord un chemin direct, donc bordé à gauche par des triangles blancs, et donc à droite par des triangles noirs. P divise $\mathcal{D}$ en deux sous-figures, appelons $\mathcal{D}_1$ celle située à gauche de P. On a alors $\Delta h(\partial\mathcal{D}_1) = \widetilde{h}(y) - h(y) < 0$, donc $\mathcal{D}_1$ compte plus de triangles noirs que de triangles blancs. Comme de plus les triangles de $\mathcal{D}_2$ touchant $\mathcal{D}_1$ sont tous noirs, il est impossible de coupler dans $\mathcal{D}$chaque triangle noir de $\mathcal{D}_1$ avec un triangle blanc adjacent pour former une tuile, donc $\mathcal{D}$ n'admet pas de pavage.



Inversement, si il n'y a pas de telle obstruction, alors d'après le théorème de Hall sur les couplages dans les graphes bipartites, il existe un pavage.

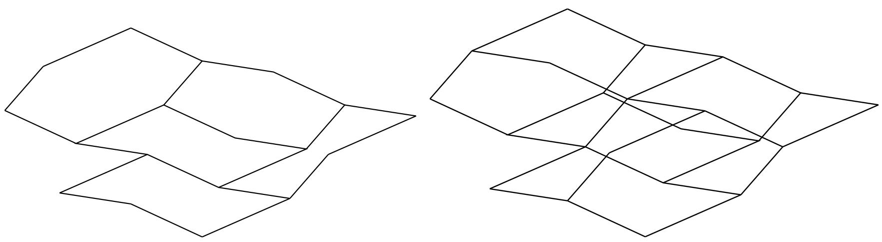
Regardons les lignes de fracture : une telle ligne divise $\mathcal{D}$ en deux sous-figures, chacune équilibrée, l'une bordée uniquement de triangles blancs, l'autre de triangles noirs. Si une tuile est placée à cheval sur la ligne de fræcture, en considérant $\mathcal{D}$ privé de cette tuile, l'une des sous figure, $\mathcal{D}_1$, aura un déficit de triangles blancs (une ayant été utilisée par la tuile en question), et ne sera bordée que de triangles noirs, on ne pourra donc pas paver le reste de $\mathcal{D}$, il n'existe donc pas de pavages comportant une telle tuile.



3.2 Extension au cas des dominos

On peut applique exactement la même démarche, et utiliser le même algorithme pour les pavages par des dominos dans un réseau carré : On colorie les carrés en damier, et une arête est considérée directe quand elle est bordée par un carré blanc à gauche, le reste est identique. (Notons quand même que le sens de parcours d'une arête ne dépend plus uniquement de son orientation, mais aussi de sa position.)

En fait, on peut la encore utiliser un revêtement du réseau par le graphe de Cayley, qui a alors l'allure suivant :



Mais dans ce cas, l'interprétation des fonctions de hauteur comme mesure de l'équilibrage d'une figure est plus naturelle.

3.3 Extension au cas d'un réseau hexagonal

On va maintenant voir dans quelle mesure cette approche peut être étendure au cas d'un reseau hexagonal, avec des tuiles composées de trois hexagones placées en triangle. Dans ce cas, le graphe de Cayley est largement trop complexe pour être utilisé, on va donc se baser sur la définition des fonctions de hauteur à partir des coloriages :

On va colorier les hexagones avec trois couleurs cette fois, qu'on appelera a, b et c. (Par la suite, i, j et k représentera toujours une permutation quelconque de a, b et c). On dira qu'une arête est parcourue en sens direct pour i si elle est bordée à *droite* par un hexagone de couleur j ou k. Pour un chemin quelconque, on définira les variations de hauteur $\Delta h_i(P)$ comme suit : Sur una arête, la variation de hauteur i vaudra $+1$ si l'arête est bordée à gauche par un hexagone de couleur i, -1 si elle est bordée à droite par un hexagone de couleur i, et 0 sinon. (Sur une arête parcourue en sens direct pour i, Δh_i sera donc positive ou nulle).

Cette foit, $\Delta h_i\left(\partial domaine\right) = 3\left(2N_i\left(\mathcal{D}\right) - n_j\left(\mathcal{D}\right) - n_k\left(domaine\right)\right)$, et donc $\mathcal{D}$ sera équilibrée ssi $\Delta h_i\left(\partial domaine\right) = \Delta h_j\left(\partial domaine\right) = \Delta h_i\left(\partial domaine\right) = 0$. (En fait, $\forall P, \delta h_i(P) + \delta h_j(P) + \delta h_k(P) = 0$, donc on ne peut considérer que deux des trois fonctions, mais les trois seront utiles plus tard). Si une figure est équilibrée, on peut donc définir h_i, h_j et h_k sur $\partial\mathcal{D}$ comme précedemment.

On va maintenant définier $\widetilde{h}_i(y) = min\left(h_i(x) + d_i(x,y)\right)$, ou x parcourt $\partial\mathcal{D}$, et $d_i(x,y)$ est l'augmentation minimale de hauteur pour i sur un chemin direct pour i allant de x à y.

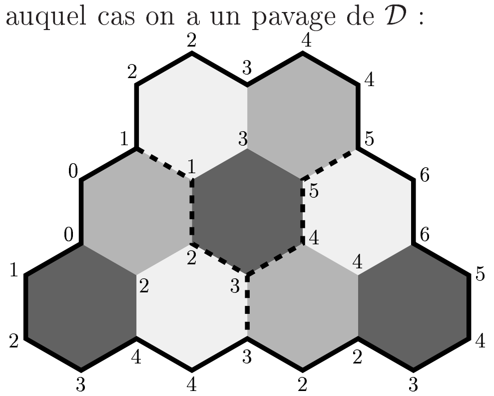
On a toujours comme condition nécessaire $\forall i, \widetilde{h}_i/\partial\mathcal{D} = h_i/\partial\mathcal{D}$ (On dira alors que $\mathcal{D}$ est bien équilibrée), en effet une ligne d'obstruction signifie encore que les hexagones de couleur i d'une sous-figure de $\mathcal{D}$ ne pourront pas tous être couplés à un hexagone de couleur j et un hexagone de couleur k dans un pavage. Malheureusement, cette condition n'est plus suffisante, loin de là. Elle n'est en fait pas vraiment très restrictive.

Alors pourquoi ce donner tout ce mal ?

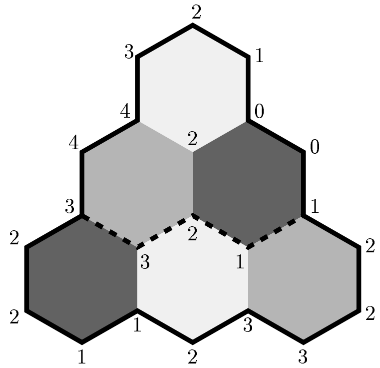
C'est la que les lignes de fracture entrent en jeu. Elle ont la même définition que précedemment, et la même signification : Toute ligne de fracture pour l'une des trois couleurs divise $\mathcal{D}$ en deux sous-figures telles que tout pavage de $\mathcal{D}$ se compose de deux pavages des sous-figures. De plus, les trois couleurs fournissent en général des lignes de fracture différentes, qu'il est utile de considérer ensemble :

On peut alors avoir plusieurs cas :

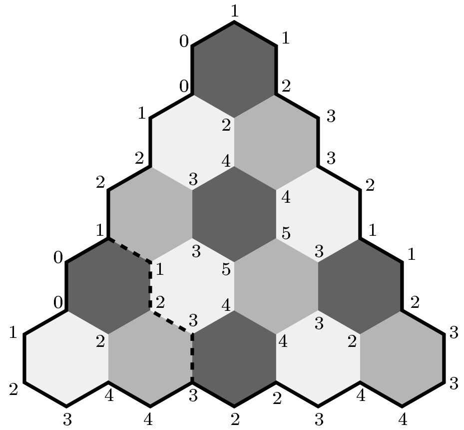
- Les lignes de fracture peuvent directement décomposer $\mathcal{D}$ en sous-domaines qui sont directement des tuiles, auquel cas on a un pavage de $\mathcal{D}$:



- Les lignes de fracture peuvent être incompatible entre elles, ou décomposer $\mathcal{D}$ en sous-figures non équilibrées, alors $\mathcal{D}$ n'est pas pavable :



– En général, les lignes de fracture diviseront $\mathcal{D}$ en sous-figures équilibrées, auquel cas il suffit de recommencer, rien n'empêche d'aboir de nouvelles lignes de fracture sur les sous-figures :



– Enfin, il peut ærriver qu'il n'y ait aucune ligne de fracture. Dans ce cas, il existe un algorithme qui donne un pavage s'il en existe un, mais il est beaucoup plus couteux. Il existe cependant une conjecture selon laquelle une figure bien équilibrée sans lignes de fracture pavable admet un pavage dont une des tuiles est placée d'une manière bien définie au niveau d'un maximum d'une des donctions h_i. Auquel cas, on aurait un algorithme quadratique qui résoudrait le problème.

Références

[CL90] C.H. Conway and J.C. Lagarias. Tiling with polyominoes and combinatorial group theory. *Journal of combinatorial theory*, Series A :183–207, 1990.

[Fou96] Jean-Claude Fournier. Pavage des figures planes sans trous par des dominos : Fondement graphique de l'algorithme de Thurston, parallélisation, unicité et décomposition. *Theorical Computer Science*, 159 :105–128, 1996.

[GS87] B. Grünbaum and G. C. Shephard. *Tilings and Patterns.* W H Freeman and Company, 1987.

[Thu90] William P. Thurston. Conway's tiling groups. *American Mathematics Monthly*, pages 753–773, October 1990.